A是一个集合．确定性：$x\in A$或$x\notin A$

无序性：$\{x,y\cdots\}=\{y,x\cdots\}$

互异性：$\{x,x\cdots\}=\{x,\cdots\}$ 相同元素只列一次

罗素悖论：将所有集合放在一起，也是"集合"，记作Ω．$\Omega\in\Omega$

所有不是自己元素的集合构成的"集合"记作A $A=\{x\mid x\notin x\}$，x为集合

要么$A\in A$，则$A\notin A$；要么$A\notin A$，则$A\in A$

对集合X，由X的子集构成的集合称为X的幂集，记为$P(X)$

则$P(X)$的元素是X的子集，$P(X)$的子集称为X上的子集族

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}\lambda_i=\{x\mid \exists i,\ s.t.\ x\in\lambda_i\}\qquad \bigcap_{i=1}^{\infty}\lambda_i=\{x\mid \forall i,\ x\in\lambda_i\}$$

设F是X上的子集族，定义$\cup F=\{x\in X\mid \exists A\subseteq F,\ s.t.\ x\in A\}$

$F=\{A,B\}$．$\cup F=A\cup B$

若F为非空子集族．（$F=\{\emptyset\}$不是非空子集族）

定义 $\cap F=\{x\in X\mid \forall A\subseteq F,\ x\in A\}$

当$F=\{A,B\}$，$\cup F=A\cup B$，$\cap F=A\cap B$

设A,B是集合任取$a\in A,b\in B$．(a,b)称为有序对，$\{a,b\}$称为无序对

所有这样的有序对全体构成集合$A\times B$．称为A,B的笛卡尔积．

类似可定义 $A_1\times A_2\times A_3\cdots A_n\times$ $(n\in\mathbb{N}^*)$

映射：给定集合A，B，若 $f \subseteq A\times B$ 满足 $\forall a\in A, \exists! b\in B$ s.t. $(a,b)\in f$，则称 f 为A到B的映射，记为 $f: A\to B$

若 $A=\phi$，则 $A\times B=\phi$，$f=\phi$ 是唯一的A到B的映射 称为空映射

若 $B=\phi$，映射不存在

A：定义域，B余定义域（cos）　　多对一

f 在C上的限制

给定 $f: A\to B$，若 $C\subseteq A$，$f\cap C\times B$ 是C到B上的映射，记为 f_C

$D=\{f(a) \mid a\in A\}\subseteq B$ 称为f的像集，记为 $f(A)$　　并不指f可逆

对B的子集V：$U=\{a\in A \mid f(a)\in V\}$ 称为V的原像集，记为 $f^{-1}(V)$

子集

对 $V=y$，将 $f^{-1}(\{y\})$ 也记为 $f^{-1}(y)$

当f是一一映射（即单又满），则f有逆映射 g（一一映射）

$g\circ f=id_A$，$f\circ g=id_B$，将g记为 f^{-1}　　$f^{-1}(y)=\{g(y)\}$

→ A到A的恒同映射

给定集合A　$f: A\times A\to A$ 称为A上的二元运算

用 $a\circ b$ 表示 $f(a,b)$　表示有序对，但对于+，×无序对也可以？

例：$A=\mathbb{Z}$，$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ 有 +，×

可数集和不可数集

记 $[n]=\{1,2,\ldots n\}$，$n=0$ 时，$[n]=\phi$

唯一的n

有限集定义 对集合A，若 $\exists n\in N$，s.t. A到 $[n]$ 有一一映射，则称A是有限集，这里的n称为A的基数，记为 $|A|$

不是有限集的称为无限集　N是最小的可数无限集

定义：和N一一对应的集合的称为可数无限集，其它无限集称为不可数集

有限集和可数无限集统称为可数集

可数集 { 有限集 [n]
可数无限集 /N

可数集 不可数无限集

命题 设A是非空集合 则以下等价

(1) A是可数集

(2) 存在满射 $f: \mathbb{N} \to A$

(3) 存在单射 $g: A \to \mathbb{N}$

证 (1) $\Rightarrow$ (2) A可数无限集 则 $\mathbb{N} \to A$ 一一对应满射 $\mathbb{N} \to \{1, 2, \cdots n\}$

(2) $\Rightarrow$ (3) 令 $g(a) = f^{-1}(a)$ 的最小元 确定性

g为单射：$g(a_1) = g(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$ 或 $a_1 \neq a_2$, 则 $g(a_1) \neq g(a_2)$

当 $a_1 \neq a_2$ 时，$f^{-1}(a_1)$ 和 $f^{-1}(a_2)$ 不相交，从而 $g(a_1) \neq g(a_2)$

(3) $\Rightarrow$ (1) 设 $g: A \to \mathbb{N}$ 为单射, 且 A 不为有限集

现证 A是可数无限集, 即构造 $\mathbb{N}$ 到A的一一映射

g是单射所以得 $A \to g(A)$ 是一一映射, 从而假设

A是 $\mathbb{N}$ 的无限子集

定义 $f: \mathbb{N} \to A$ 如下 (归纳定义)

$f(0) = A$ 的最小元，$f(1) = A \setminus f(0)$ 的最小元 $\cdots$

$f(n) = A \setminus \{f(0), f(1), \cdots f(n-1)\}$ 的最小元

下证f为一一映射

当 $n < m$ 时，则 $f(m) \in A \setminus \{f(0), f(1), \cdots f(m-1)\}$, $\Rightarrow f(n) \neq f(m)$

事实上 f↑：$n < m$ 时, $f(n) < f(m)$

f为满射 $\forall a \in A$. 考虑 $I = \{n \mid f(n) \geq a\}$，记I的最小元为 n_0

则 $f(n_0) \geq a$ n_0 最小. $n_0 = 0$. 此时 a为A的最小元,

若 $n_0 > 0$, $f(i) < a, i = 0, 1, \cdots, n_0 - 1$, $f(n_0) \leq a$ 因此 $f(n_0) = a$

定义 一族元素 给定集合J $x: J \to X$，将$x(\partial)$记为x_∂，将X记为$(x_\partial)_{\partial\in J}$ 称为X中(以J为指标)的一族元素

考虑 $x: J \to P(X)$，即考虑$P(X)$的一族元素，此时$x_\partial \subseteq X$，所以称$(X_\partial)_{\partial\in J}$为以J为指标的一族子集。此时 $x(J)=\{x_\partial \mid \partial\in J\}$ 是X上的子集族

定义 设X为集合，F是X上的子集族($F\subseteq P(X)$)，若对F中任意有限个元素$A_1, A_2, \dots, A_n\ (n\geq 1)$ 都有$A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_n\in F$，则称F具有有限交性质

F具有有限交性质 $\Leftrightarrow$ 对F的任意元素A,B，都有$A\cap B\in F$

定义 若对F中一族元素$(A_\partial)_{\partial\in J}$，($A_\partial\in F$)都有$\bigcup_{\partial\in J}A_\partial\in F$，则称F具有任意并性质

F具有任意并 给定子集族F，若对任意$\mathcal{E}\subseteq F$，都有$\bigcup\mathcal{E}\in F$，则称F具有任意并性质 ($\mathcal{E}=\{A_\partial \mid \partial\in J\}$)

定义 给定$A\subseteq\mathbb{R}$，若$\forall x\in A$，$\exists\delta>0$ (δ_x)，s.t. $(x-\delta, x+\delta)\subseteq A$，则称A为开集

例：$(0,1)$为开集，$\forall x\in(0,1)$ 取$\delta=\min\{x,1-x\}$ **定义** $\varnothing$是开集 $\mathbb{R}$(全集)是开集

命题 记$F=\{U \mid U\subseteq\mathbb{R}$为开集$\}$，则

(i) $\varnothing\in F$ $\mathbb{R}\in F$

(ii) F具有有限交性质

(iii) F具有任意并性质

(ii) 记$A\in F$，$B\in F$ 任取$x\in A\cap B$ 则A是开集知 $\exists\delta_1>0$ s.t. $(x-\delta_1, x+\delta_1)\subseteq A$，由B是开集知 $\exists\delta_2>0$ s.t. $(x-\delta_2, x+\delta_2)\subseteq B$，取$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则$(x-\delta,x+\delta)\subseteq A\cap B$

(iii) 设$(A_\partial)_{\partial\in J}$是F的一族元素，任取$x\in\bigcup_{\partial\in J}A_\partial$，则$\exists\partial_0\in J$ s.t. $x\in A_{\partial_0}$，由A_{∂_0}是开集，$\exists\delta>0$，s.t. $(x-\delta,x+\delta)\subseteq A_{\partial_0}\subseteq\bigcup$

定义 设$f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 给定$x\to\mathbb{R}$，若对包含$f(x)$的任意开集V，都存在包含x的开集U，s.t. $f(U)\subseteq V$

$\Leftrightarrow U\subseteq f^{-1}(V)$ 则称f在x处连续，若f处处连续，则称f连续

引理 f在x处连续 $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，s.t. $|x'-x|<\delta$时，$|f(x')-f(x)|<\varepsilon$

证明 $\Rightarrow$ 令$V=(f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon)$，V是包含于$f(x)$的开集，由连续定义，存在包含于x的开集U，s.t. $f(U)\subseteq V$.

由U是开集，则$\exists\delta>0$，s.t. $(x-\delta,x+\delta)\subseteq U \Rightarrow f(x-\delta,x+\delta)\subseteq V$

$\Leftarrow$ 给定开集$V\ni f(x)$，由开集定义，$\exists\varepsilon>0$，s.t. $(f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon)\subseteq V$，由右边连续性知 $\exists\delta>0$，s.t. $f(x-\delta,x+\delta)\subseteq(f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon)\subseteq V$

命题 $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$连续 $\Leftrightarrow$ 对任意开集V，$f^{-1}(V)$开集

证：$\Leftarrow$ 若$U\ni f(x)$，则$f^{-1}(V)\ni x$，令$U=f^{-1}(V)$即可

$\Rightarrow$ 给定开集V，$\forall x\in f^{-1}(V)$，由f在x处连续，存在包含于x的开集$U(x)$，s.t. $f(U_x)\subseteq V \Leftrightarrow U_x\subseteq f^{-1}(V)$ 从而$f^{-1}(V)=\bigcup_{x\in f^{-1}(V)}U_x$

推论 $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$，$g: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$为连续函数，则$g\circ f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$连续 $((g\circ f)^{-1}(V)\subseteq f^{-1}(g^{-1}(V)))$

定理 设$f: [0,1]\to\mathbb{R}$连续，则 (闭区间上连续函数)

介值 (i) 若$f(0)<0<f(1)$，则$\exists x\in[0,1]$，s.t. $f(x)=0$

极值 (ii) $\exists c\in[0,1]$，s.t. $f(c)=\max\{f(x) \mid x\in[0,1]\}$

拓扑：定义：X是集合 $\mathcal{T}$ 是X上的子集族，若 $\mathcal{T}$ 满足以下性质

(i) $\phi, X \in \mathcal{T}$ (ii) $\mathcal{T}$ 具有有限交性质

(iii) $\mathcal{T}$ 具有任意并的性质 则称 $\mathcal{T}$ 是X上的拓扑 (Topology)

$(X, \mathcal{T})$ 称为拓扑空间，或简称X为(拓扑)空间

$\mathcal{T}$ 中的元素称为开集 (先有拓扑，拓扑中的元素称为开集)

若开集U包含x，则称U为x的开邻域

例如：向量是向量空间的元素

例1. 任给集合X，$P(X)$ 是拓扑，称为离散拓扑

$\mathcal{T}$ 是离散拓扑 $\Leftrightarrow \forall x \in X.\ \{x\} \subseteq \mathcal{T}$

$\{\phi, \mathcal{T}\}$ 是拓扑，称为平凡拓扑

$\mathcal{T} = \{U \subseteq X \mid X \setminus U$ 是有限集$\} \cup \{\phi\}$ 是拓扑

i) $X = X \setminus \phi$ ii) 设 $U = X \setminus A$，$V = X \setminus B$，$U \cap V = X \setminus (A \cup B)$ 有限交

iii) 设 $U_\alpha = X \setminus A_\alpha$，则 $\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha = X \setminus \bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha$

$\mathcal{T}$ 称为有限补拓扑，或余有限拓扑

2 $X = \{a, b\}$，$\mathcal{T}_1 = \{\phi, X\}$，$\mathcal{T}_2 = \{\phi, \{a\}, \{b\}, X\}$

$\mathcal{T}_3 = \{\phi, \{a\}, \{a, b\}\}$，$\mathcal{T}_4 = \{\phi, \{b\}, \{a, b\}\}$

3. 对于实数 $\mathbb{R}$，以上定义的 $\mathcal{T}$ 是拓扑，称为标准拓扑

定义：设X是集合，$\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ 是X上的拓扑，若 $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$，则称 $\mathcal{T}_2$ 比 $\mathcal{T}_1$ 精细，$\mathcal{T}_1$ 比 $\mathcal{T}_2$ 粗糙

引理 设$(\mathcal{T}_\alpha)_{\alpha\in J}$是一族拓扑，则$\bigcap_{\alpha\in J}\mathcal{T}_\alpha$是拓扑

定义：设$(X,\mathcal{T})$，$(Y,\mathcal{T}')$是两个拓扑空间，$f: X\to Y$为H映射.若

U是X的开集$\Leftrightarrow f(U)$是Y的开集（$U\in\mathcal{T}\Leftrightarrow f(U)\in\mathcal{T}'$）

则称f为同胚

引理：设$\mathcal{T}_\alpha(\alpha\in J)$是$X$的拓扑，则$\bigcap_\alpha\mathcal{T}_\alpha$也是$X$上的拓扑（更加粗糙）

从而从给子集族$\mathcal{C}$，则所有包含$\mathcal{C}$的拓扑的交是X上的拓扑，该拓扑包含$\mathcal{C}$的最粗糙的拓扑，称为由$\mathcal{C}$生成的拓扑，记为$\mathcal{T}(\mathcal{C})$

记$\mathcal{C}=\{A_\alpha|\alpha\in J\}$，则$\mathcal{T}(\mathcal{C})=\{(A_{\alpha_1}\cap A_{\alpha_2}\cdots\cap A_{\alpha_k})\cup(A_{\beta_1}\cap\cdots\cap A_{\beta_l})\cup\cdots$ 任意并

全集 $\cup\{X\}$.（ϕ是0个集合的并）

定义：若子集族$\mathcal{C}$满足

i) $\forall x\in X$，$\exists C\in\mathcal{C}$，s.t. $x\in C$

ii) 任给$C_1,C_2\in\mathcal{C}$，$\forall x\in C_1\cap C_2$，都存在$C_3\in\mathcal{C}$，s.t.，$x\in C_3\subseteq C_1\cap C_2$

则称$\mathcal{C}$是一个基 $\mathcal{C}$的元素（X的子集）称为基元素

命题：设$\mathcal{C}$是X上的一个基，则$U\in\mathcal{T}(\mathcal{C})\Leftrightarrow\forall x\in U$，$\exists C\in\mathcal{C}$，s.t. $x\in C\subseteq U$

证明 令$\mathcal{T}=\{\forall x\in U,\exists C\in\mathcal{C}, \text{s.t. } x\in C\subseteq U\}$ 即证$\mathcal{T}=\mathcal{T}(\mathcal{C})$

① $\mathcal{T}$是拓扑：i) $\phi\in\mathcal{T}$ 虚真命题 $P\Rightarrow Q$ 若P不成立，则$P\Rightarrow Q$总成立

$X\in\mathcal{T}$ ii) 若$U,V\in\mathcal{T}$，任取$x\in U\cap V$，由$x\in U$知$\exists C_1\in\mathcal{C}$，s.t.

$x\in C_1\subseteq U$. 由$x\in V$知$\exists C_2\in\mathcal{C}$，s.t. $x\in C_2\subseteq V$，由基的定义的第二

条$\Rightarrow\exists C_3\in\mathcal{C}$，s.t. $x\in C_3\subseteq C_1\cap C_2\subseteq U\cap V$ 即$U\cap V\in\mathcal{T}$

iii) 设$U_\alpha\in\mathcal{T}$，$\alpha\in J$，$\forall x\in\bigcup_{\alpha\in J}U_\alpha$，则$\exists\alpha_0\in J$，s.t. $x\in U_{\alpha_0}$，从而

$\exists C\in\mathcal{C}$，s.t. $x\in C\subseteq U_{\alpha_0}\subseteq\bigcup_{\alpha\in J}U_\alpha$

② 由定义 $\mathcal{T}\supseteq\mathcal{C}$，$\Rightarrow\mathcal{T}\supseteq\mathcal{T}(\mathcal{C})$ 反面设$\mathcal{T}$的元素，$\exists C_x\in\mathcal{C}$，

s.t. $x\in C_x\subseteq U\Rightarrow U=\bigcup_{x\in U}C_x$

由$\mathcal{T}(\mathcal{C})$的定义. $C_x\in\mathcal{T}(\mathcal{C})\Rightarrow\bigcup_{x\in U}C_x\in\mathcal{T}(\mathcal{C})$，即$\mathcal{T}\subseteq\mathcal{T}(\mathcal{C})$

由命题可知，当$\mathcal{C}$是一个基时，$\mathcal{T}(\mathcal{C})=\{U \mid \forall x\in U, \exists C\in\mathcal{C}, s.t.\ x\in C\subseteq U\}$
$=\{\bigcup_{\alpha\in J} C_\alpha \mid C_\alpha\in\mathcal{C} \mid J$是指标集$\}$

例子：① $X=\mathbb{R}$，$\mathcal{C}=\{(a,b)\mid a,b\in\mathbb{R}\}$是一个基；
$\forall x\in\mathbb{R}$，$x\in(x-1,x+1)$，$\mathcal{C}$是具有有限交性质
$(C_3=C_1\cap C_2)$ 故$\mathcal{C}$是一个基　$\mathcal{C}$生成的拓扑 = 标准拓扑
在标准拓扑中，$(0,1)$是开集，$[0,1]$是闭集，$\mathbb{R}\setminus[0,1]$是开集
$(-\infty,0)=\bigcup_{n=1}^{+\infty}(-n,0)$，$[0,1)$　　$[0,1)$既不是开集也不是闭集
② $X\in\mathbb{R}$，$\mathcal{C}=\{[a,b)\mid a,b\in\mathbb{R}\}$是一个基，生成的拓扑称为下限拓扑
把相应的拓扑空间记为$\mathbb{R}_l$　(标准拓扑空间)　　严格精细
由$(a,b)=\bigcup_{n=1}^{+\infty}[a+\frac{1}{n},b)$ 知(a,b)是下限拓扑中开集 $\Rightarrow$ 标准拓扑$\subsetneq$下限拓扑
③ $X=\mathbb{R}$，$K=\{\frac{1}{n}\mid n\in\mathbb{N}^*\}$，$\mathcal{C}=\{(a,b)\mid a,b\in\mathbb{R}\}\cup\{(a,b)\setminus K\mid a,b\in\mathbb{R}\}$
是一个基，生成的拓扑称为K拓扑(比标准拓扑更精细)，相应的拓扑空间记为$\mathbb{R}_K$

特定的拓扑

定义：设$(X,\mathcal{T})$是拓扑空间，若基$\mathcal{C}$满足$\mathcal{T}(\mathcal{C})=\mathcal{T}$，则称$\mathcal{C}$是$\mathcal{T}$的基
引理：设$(X,\mathcal{T})$是拓扑空间，$\mathcal{C}\subseteq\mathcal{T}$，则$\mathcal{C}$是$\mathcal{T}$的基
$\Leftrightarrow$ 对$\forall$开集U以及$x\in U$，存在$C\in\mathcal{C}$，s.t. $x\in C\subseteq U$
证明：$\Rightarrow$ 由命题 $U\in\mathcal{T}=\mathcal{T}(\mathcal{C})$ 等价于右边
$\Leftarrow$ 我们要证明$\mathcal{C}$是一个基且生成$\mathcal{T}$，
i) 取$U=X\Rightarrow\forall x\in X$，$\exists C\in\mathcal{C}$，s.t. $x\in C\subseteq X$
ii) $\forall x\in C_1\cap C_2$，取$U=C_1\cap C_2$，由条件得$\exists C_3\in\mathcal{C}$，s.t. $x\in C_3\subseteq C_1\cap C_2$
由命题$\mathcal{T}(\mathcal{C})\supseteq\mathcal{T}$，而$\mathcal{C}\subseteq\mathcal{T}\Rightarrow\mathcal{T}(\mathcal{C})\subseteq\mathcal{T}$ 所以$\mathcal{T}(\mathcal{C})=\mathcal{T}$
引理 设$\mathcal{B}$，$\mathcal{B}'$分别是$\mathcal{T}$，$\mathcal{T}'$的基，则$\mathcal{T}\subseteq\mathcal{T}'$
$\Leftrightarrow$ 对$\forall B\in\mathcal{B}$以及$x\in B$，存在$B'\in\mathcal{B}'$ s.t. $x\in B'\subseteq B$

证明：$\Rightarrow$ 此时 $B\in\beta\subseteq\tau\subseteq\tau'=\tau(\beta')$，由命题即知

$\Leftarrow$ 任取 $U\in\tau$，由 $\tau=\tau(\beta)$ 以及命题，知

$\forall x\in U$，$\exists B\in\beta$，s.t. $x\in B\subseteq U$ 由条件

$\exists B'\in\beta'$，s.t. $x\in B'\subseteq B\subseteq U$，从而由命题知 $U\in\tau(\beta')=\tau'$，
即 $\tau\subseteq\tau'$

例 $X=\mathbb{R}$，$\mathcal{C}=\{(a,b)\mid a,b\in\mathbb{Q}\}$ 则 $\mathcal{C}$ 是一个基且也生成标准拓扑

记 $\mathcal{C}=\{(a,b)\mid a,b\in\mathbb{R}\}$，则 $\mathcal{C}\supseteq\beta\Rightarrow\tau(\mathcal{C})\supseteq\tau(\beta)$

下面说明 $\tau(\mathcal{C})\subseteq\tau(\beta)$ 对 $\forall x\in(a,b)$，$\exists$ 有理数 $p\in(a,x)$，$q\in(x,b)$

则 $x\in(p,q)\in\beta\subseteq(a,b)$，从而由引理 $\tau(\mathcal{C})\subseteq\tau(\beta)$

定义：若子集族 $\mathcal{S}$ 满足 $\bigcup\mathcal{S}=X$，则称 $\mathcal{S}$ 是一个子基，若 $\tau(\mathcal{S})=\tau$，

则称 $\mathcal{S}$ 是 τ 的子基（任取子集族 $\mathcal{S}$，$\mathcal{S}=\mathcal{C}\cup\{X\}$ 仍是子基且 $\tau(\mathcal{C})=\tau(\mathcal{S})$）

引理：设 $\mathcal{S}$ 是一个子基，则 $\tilde{\mathcal{S}}=\{U_1\cap U_2\cdots\cap U_k\mid U_i\in\mathcal{S},k\geq1\}$
是基，且 $\tau(\tilde{\mathcal{S}})=\tau(\mathcal{S})$ 有限交和任意并

例：$X=\mathbb{R}$，$\mathcal{S}=\{(a,+\infty)\mid a\in\mathbb{R}\}\cup\{(-\infty,a)\mid a\in\mathbb{R}\}$

$\mathcal{S}$ 是标准拓扑的子基

任意开区间均可为射线的交，任何射线都可为开区间的并

度量空间 定义 设X是非空集合, 其 $d: X\times X \to \mathbb{R}$ 满足

i) $d(x,y)\geq 0$, 且 $d(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$ 【非负性】

ii) $d(x,y)=d(y,x)$, $\forall x,y\in X$ 【对称性】

iii) $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$, $\forall x,y\in X$. 【三角不等式】

则称d是X上的度量, $d(x,y)$称为度量d下x,y之间的距离.

例 X非空, 令 $d(x,y)=\begin{cases}1, & x\neq y\\ 0, & x=y\end{cases}$

定义度量球

$\forall x\in X$, $r>0$, 令 $B_d(\underset{\text{球心}}{x},\overset{\text{半径}}{r})=\{y\in X \mid d(x,y)<r\}$ 度量

称为以x为球心, r为半径的度量球

引理 $\mathcal{C}=\{B_d(x,r)\mid x\in X, r>0\}$ 是一个基

证明 i) $\forall x\in X$, $x\in B_d(x,r)$

ii) 设 $x\in B_d(y_1,r_1)\cap B_d(y_2,r_2)$ 令 $r=\min\{r_1-d(x,y_1), r_2-d(x,y_2)\}>0$

则 $B_d(x,r)\subseteq B_d(y_1,r_1)\cap B_d(y_2,r_2)$

若 $z\in B_d(x,r)$, 则 $d(x,z)<r \Rightarrow d(y_1,z)\leq d(y_1,x)+d(x,z)<d(y_1,x)+r$

由r的选取因此 $r+d(x_1,y_1)\leq r_1$, 从而 $d(y_1,z)<r_1$

即有 $z\in B_d(y_1,r_1)$ 故 $B_d(x,r)\subseteq B_d(y_1,r_1)$ 同理 $B_d(x,r)\subseteq B_d(y_2,r_2)$

因此 $B_d(x,r)\subseteq B_d(y_1,r_1)\cap B_d(y_2,r_2)$

$T(\mathcal{C})$称为度量(诱导的)拓扑, 相应的拓扑空间称为度量空间

任给$\varepsilon>0$, 令 $\mathcal{C}_\varepsilon=\{B_d(x,r)\mid x\in X, 0<r\leq\varepsilon\}$, 则$\mathcal{C}_\varepsilon$是度量拓扑的基

首先证明$\mathcal{C}_\varepsilon$也是一个基, 再证明与$\mathcal{C}$生成同一个拓扑(作业)

例 1 实数上的拓扑: $X=\mathbb{R}$, $d(x,y)=|x-y|$ 是X的度量(非负, 对称, 三角)

其生成的拓扑为标准拓扑. 开区间=度量球 基相同

2. $\mathbb{R}^n=\{(x_1,x_2)\mid x_i\in\mathbb{R}\}$ 令 $d_2(\underbrace{x,y}_{\text{均为点}})=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$ d_2称为欧氏度量

相应的拓扑称为标准拓扑或者欧氏拓扑

类似地，$\forall p\geq 1$，$d_p(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ 也是度量，

且也诱导标准拓扑（$p=2$，$p=1$，$p=\infty$ 为特殊点）

3. (X_1,d_1)，(X_2,d_2) 为度量空间，则 $\forall p\geq 1$

$d_p((x_1,x_2),(y_1,y_2))\triangleq\left(d_1^p(x_1,y_1)+d_2^p(x_2,y_2)\right)^{\frac{1}{p}}$ 为 $X_1\times X_2$ 上的度量

$d_\infty((x_1,x_2),(y_1,y_2))\triangleq\max\{d_1(x_1,y_1),d_2(x_2,y_2)\}$ 也是 $X_1\times X_2$ 上的度量

这些度量诱导相同的拓扑

4. (X,d) 为度量空间，令 $\bar{d}(x,y)=\min\{d(x,y),1\}$ 则 $\bar{d}$ 也是度量，

且诱导相同的度量.（任何两点的距离为有限的）

$r>1$，$B_{\bar{d}}(x,r)=X$

证明 i) $\bar{d}\geq 0$ 且 $\bar{d}(x,y)=0\Leftrightarrow d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$

ii) $\bar{d}(x,y)=\bar{d}(y,x)$

iii) $\bar{d}(x,y)\leq\bar{d}(x,z)+\bar{d}(z,y)$

若右边有一项为1，上式成立

若右边均不为1，此时 $\bar{d}(x,z)=d(x,z)<1$，$\bar{d}(z,y)=d(z,y)<1$

左边 $\leq d(x,y)\leq d(y,z)+d(z,y)\leq\bar{d}(y,z)+\bar{d}(z,y)$

因此 $\bar{d}$ 为度量

由于 C_ε 也为度量拓扑的基，取 $\varepsilon=\frac{1}{2}$ 则 $B_d(x,r)=B_{\bar{d}}(x,r)$

从而对应的基相同

$\bar{d}$ 称为标准有界度量

定义 设 (X,d) 为度量空间，若 $D=\sup\{d(x,y)\mid x,y\in X\}<+\infty$

则称 d 为有界度量，D 称为 (X,d) 的直径，记为 $\mathrm{diam}(X,d)$

子拓扑和乘积拓扑

设$(X,\mathcal{T})$是一个拓扑空间，$A\subseteq X$，定义$\mathcal{T}_A=\{U\cap A\mid U\in\mathcal{T}\}$，则$\mathcal{T}_A$是A上的拓扑。

证. i) $\phi\cap A=\phi$，$X\cap A=A$

ii) $(U_1\cap A)\cap\cdots\cap(U_k\cap A)=(U_1\cap\cdots\cap U_k)\cap A\in\mathcal{T}_A$ 有限交

iii) $\bigcup_{\alpha\in J}(U_\alpha\cap A)=(\bigcup_{\alpha\in J}U_\alpha)\cap A\in\mathcal{T}_A$

$\mathcal{T}_A$简称为A上的子空间拓扑，相应的空间称为子空间。

为了明确，我们称$\mathcal{T}_A$是$\mathcal{T}$诱导的子拓扑

$\mathcal{T}_A$中的元素称为相对开集。$\mathcal{T}_A$中的元素在A中的补集称为相对补集。拓扑取交，基取交后生成拓扑

引理. 给定X上的子集族$\mathcal{S}$，令$\mathcal{S}_A=\{U\cap A\mid U\in\mathcal{S}\}$

若$\mathcal{S}$是X上拓扑的子基，则$\mathcal{S}_A$是子拓扑的子基。

证明 记X上的拓扑为$\mathcal{T}$，则$\mathcal{S}\subseteq\mathcal{T}\Rightarrow\mathcal{S}_A\subseteq\mathcal{T}_A$.

任取$\mathcal{T}_A$中的元素V以及$x\in V$，由$V\in\mathcal{T}_A\Rightarrow\exists U\in\mathcal{T}$ s.t. $V=U\cap A$，

由$x\in U$以及$\mathcal{S}$是$\mathcal{T}$的基可知，$\exists W\in\mathcal{S}$，s.t. $x\in W\subseteq U$，从而

$x\in W\cap A\subseteq U\cap A=V$，$W\cap A\in\mathcal{S}_A$，从而$\mathcal{S}_A$是$\mathcal{T}$的基。

证明思路：对任意$\mathcal{T}_A$中开集V，以及$x\in V$，都存在$\mathcal{S}_A$中的元素W，使得$x\in W\subseteq V$ [如何判定基]

若$\mathcal{S}$是$\mathcal{T}$的子基，则$\tilde{\mathcal{S}}=\{U_1\cap\cdots\cap U_k\mid U_i\in\mathcal{S}\}$是一个基，且

$\tilde{\mathcal{S}}_A=(\tilde{\mathcal{S}})_A$：$(U_1\cap A)\cdots\cap(U_k\cap A)=(U_1\cap U_2\cdots\cap U_k)\cap A$

因此$\tilde{\mathcal{S}}$为$\mathcal{T}$的基，$\tilde{\mathcal{S}}_A$为$\mathcal{T}_A$的基，因此$\mathcal{S}_A$为$\mathcal{T}_A$的子基

例1. $X=\mathbb{R}$, $A=(0,1]$, 则 $(\frac{1}{2},1]=(\frac{1}{2},2)\cap A$ 是 A 中的相对开集

$(0,\frac{1}{2}]=[-1,\frac{1}{2}]\cap A$ 是 A 的相对闭集 [相对开|闭集]

$X=\mathbb{R}$, $A=\mathbb{Q}$ $(-\infty,\sqrt{2})\cap A$ 是相对开集.

命题. 设 $(X,\mathcal{T})$ 是一个拓扑空间.

① $A\subseteq Y\subseteq X$, 则 $(\mathcal{T}_Y)_A=\mathcal{T}_A$

Y 的子空间仍为 X 的子空间 $(U\cap Y)\cap A=U\cap A$ 看成最大空间的子空间

② $A\subseteq X$, 则 C 是 A 中相对闭集 $\Leftrightarrow$ $\exists$ X 中闭集 B, 使得 $B\cap A=C$

相对闭集为相对开集在 A 中的补集

$\Rightarrow$ $A\setminus C$ 是相对开集, $\exists U\in\mathcal{T}$ s.t. $A\setminus C=U\cap A$

$C=(X\setminus U)\cap A$. 可通过画图

取 $B=X\setminus U$ 即可 $\Leftarrow$ $C=B\cap A$ $=(X\setminus U)\cap A$, 则 $A\setminus C=U\cap A$

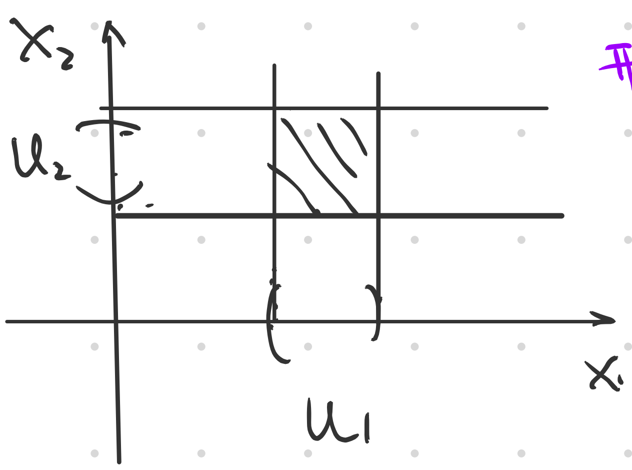
③ 设 A 是 X 的开(闭)集, 则 A 中的相对(开)闭集为 X 中的开(闭)集.

乘积拓扑 设 $(X_1,\mathcal{T}_1)$, $(X_2,\mathcal{T}_2)$ 是两个拓扑空间. 令

$\mathcal{C}=\{U_1\times U_2 \mid U_1\in\mathcal{T}_1, U_2\in\mathcal{T}_2\}$, 则 $\mathcal{C}$ 是 $X_1\times X_2$ 上的一个基

$(U_1\times U_2)\cap(V_1\times V_2)=(U_1\cap V_1)\times(U_2\cap V_2)$ 交封闭

生成的拓扑称为(乘)积拓扑, 相应的空间称为(乘)积空间.



开矩形

引理. 设 $\mathcal{C}_i$ 是 τ_i $(i=1,2)$ 的基，令 $\mathcal{F}=\{U\times V \mid U\in \mathcal{C}_1, V\in \mathcal{C}_2\}$

则 $\mathcal{F}$ 是乘积拓扑的基.

证明：$\mathcal{F}$ 中的元素是积拓扑的开集. 任取乘积空间中开集 W

以及 $(x_1,x_2)\in W$，$\exists C\in\mathcal{F}$，使得 $x\in C\subseteq W$

由积拓扑的定义，$\exists U\times V\in\mathcal{C}$，使得 $(x_1,x_2)\in U\times V\subseteq W$

由 $(x_1,x_2)\in U\times V \Rightarrow x_1\in U, x_2\in V$，由 $\mathcal{C}_1$ 是 τ_1 的基 $\Rightarrow$

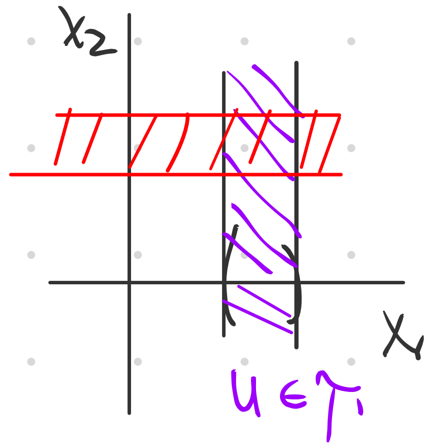
$\exists \tilde{U}\in\mathcal{C}_1$ s.t. $x_1\in\tilde{U}\subseteq U$. 同理 $\exists\tilde{V}\in\mathcal{C}_2$, s.t. $x_2\in\tilde{V}\subseteq V$.

因此 $(x_1,x_2)\subseteq\tilde{U}\times\tilde{V}\subseteq U\times V\subseteq W$ $\quad\tilde{U}\times\tilde{V}\in\mathcal{F}$. #

令 $\pi_i: X_1\times X_2\to X_i$，$\pi_i(x_1,x_2)=x_i$，$i=1,2$

$\mathcal{S}=\{\pi_1^{-1}(U)\mid U\in\tau_1\}\cup\{\pi_2^{-1}(V)\mid V\in\tau_2\}$.

$\pi_1^{-1}(U)=\{(x_1,x_2)\mid x_1\in U\}=U\times X_2$ ↘ 开柱体



引理. $\mathcal{S}$ 是子基，且对应的基为 $\mathcal{C}$,

证明：$X_1\times X_2=\bigcup\mathcal{S}\Rightarrow\mathcal{S}$ 是子基.

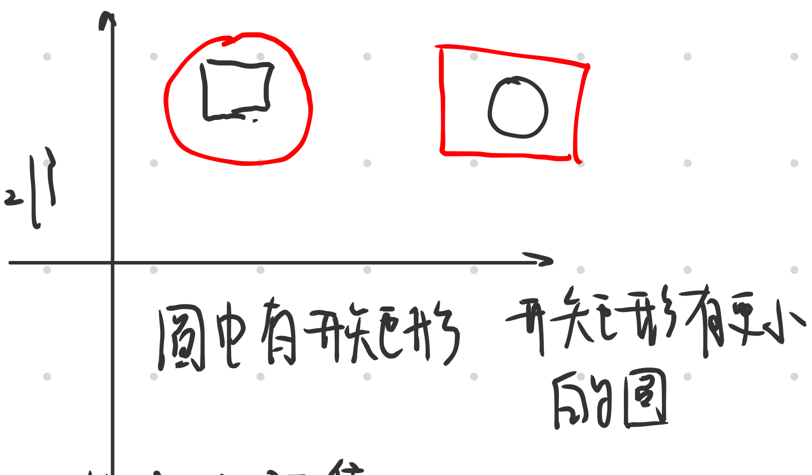
记 $\tilde{\mathcal{S}}$ 为 $\mathcal{S}$ 生成的基：$\tilde{\mathcal{S}}=\{U_1\cap U_2\cdots\cap U_k\mid U_i\in\mathcal{S}, k\in\mathbb{N}^*\}$

则由 $\mathcal{S}\subseteq\mathcal{C}\Rightarrow\tilde{\mathcal{S}}\subseteq\mathcal{C}$

反过来：$U\times V=U\times X_2\cap X_1\times V=\pi_1^{-1}(U)\cap\pi_2^{-1}(V)$

例. $(\mathbb{R}^2$, 欧氏拓扑$)$ 由度量 d_2 诱导的拓扑，该拓扑等于乘积拓扑

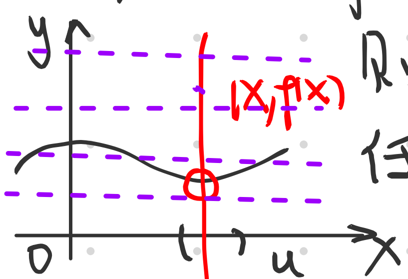
利用拓扑的粗细比较



或有 $d_\infty((x_1,x_2),(y_1,y_2))=\max\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|\}$

首先 $\{(x,y)\mid x>0, y>0\}=\{x\mid x>0\}\times\{y\mid y>0\}$

是开集. 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为连续函数



则 $\{(x,f(x))\mid x\in\mathbb{R}\}$ 是欧氏拓扑中的闭集.

任取 $(x,y)\notin G_f\Leftrightarrow y\neq f(x)$. 取 $0<\delta<\frac{|f(x)-y|}{2}$

则 $(y-\delta, y+\delta)\cap(f(x)-\delta, f(x)+\delta)=\phi$

由 f 连续 $\Rightarrow U\triangleq f^{-1}(f(x)-\delta, f(x)+\delta)$ 为 x 的开邻域

此时 $U\times(y-\delta, y+\delta)\cap G_U(f)=\phi$ 否则 有 $(\tilde{x}, f(\tilde{x}))\in U\times(y-\delta, y+\delta)$

$\Rightarrow \tilde{x}\in U, f(\tilde{x})\in(y-\delta, y+\delta)$　　U 为 x 的开邻域

$\tilde{x}\in U \Rightarrow f(\tilde{x})\in(f(x)-\delta, f(x)+\delta)$ 与 $f(\tilde{x})\in(y-\delta, y+\delta)$ 矛盾

引理：子拓扑的积拓扑 = 积拓扑的子拓扑

证明 设 $(X_1, \mathcal{T}_1), (X_2, \mathcal{T}_2)$ 是拓扑空间，$A_1\subseteq X_1$，$A_2\subseteq X_2$ 则　（积拓扑的定义）

( ) 表示拓扑空间

$(A_1, (\mathcal{T}_1)_{A_1})\times(A_2, (\mathcal{T}_2)_{A_2})$ 的积拓扑的基 $=\{U\times V \mid U\in(\mathcal{T}_1)_{A_1}, V\in(\mathcal{T}_2)_{A_2}\}$

$A_1\times A_2\subseteq X_1\times X_2$ 的子拓扑的基 $=\{(U\times V)\cap(A_1\times A_2) \mid U\in\mathcal{T}_1, V\in\mathcal{T}_2\}$

因 $(U\times V)\cap(A_1\times A_2)=(U\cap A_1)\times(V\cap A_2)$ 知上面两个基相同

$U\cap A_1\in(\mathcal{T}_1|A_1)$，$V\cap A_2\in(\mathcal{T}_2|A_2)$（子拓扑的定义）

序拓扑：设 $(X, <)$ 是个非单点集的全序集

在 X 中，记 $[a, b]=\{x\in X \mid a\le x\le b\}$，$(a, +\infty)=\{x\in X \mid x>a\}$，开闭括号

记 $\mathcal{S}=\{(a, +\infty) \mid a\in X\}\cup\{(-\infty, a) \mid a\in X\}$，则 $\mathcal{S}$ 是子基 (sub)

$\mathcal{S}$ 生成的拓扑称为序拓扑

引理 i) (a, b)，$a, b\in X$

ii) 若 X 有最大元 M，$(a, M]$，$a\in X$　假设 X 有最大小元

iii) 若 X 有最小元 m，$[m, a)$，$a\in X$

则这三类集合均为序拓扑中的开集，构成序拓扑的基

证明：i) $(a, b)=(-\infty, b)\cap(a, +\infty)$ 是开集

ii) 此时 $(a, M]=(a, +\infty)$ 是开集，iii) 同理　iii) iii) 验证

首先　这三类集合的全体（记成 $\mathcal{C}$）是一个基

若 X 有最大元和最小元 则 $\mathcal{S}\subseteq\mathcal{C}\Rightarrow\mathcal{C}$ 是序拓扑的基

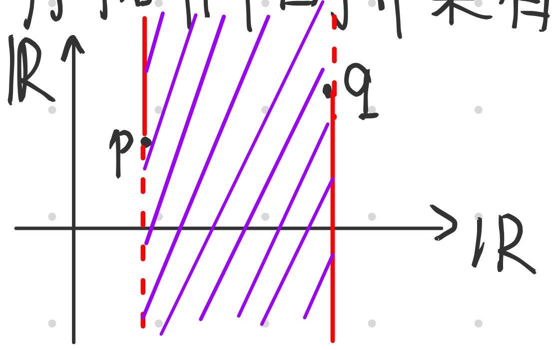
若 X 无最大元，则 $(a, +\infty)=\bigcup_{b\in(a, +\infty)}(a, b)$　$(a, +\infty)\in\mathcal{T}(\mathcal{C})$

同理 $(-\infty, a)\in\mathcal{T}(\mathcal{C})$

例 ① $(\mathbb{R},<)$ 仅有 i) 即 (a,b)，此时序拓扑 = 标准拓扑.

② $(\mathbb{R}\times\mathbb{R},<)$ $<$ 为字典序：$(a_1,a_2)<(b_1,b_2) \Leftrightarrow a_1<b_1$ 或者 $a_1=b_1,\ a_2<b_2$

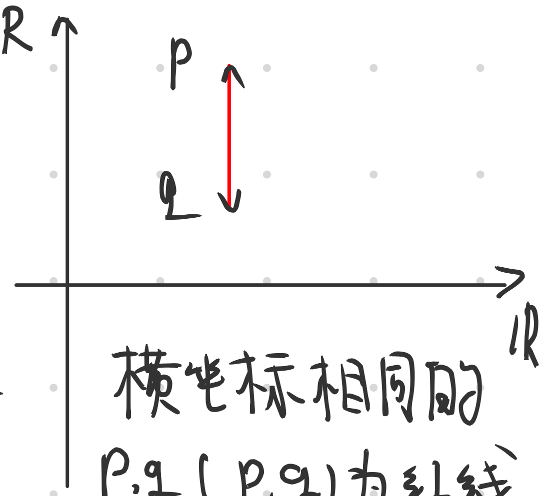
序拓扑中的开集有 (p,q)，其中 $p,q\in\mathbb{R}^2$ → 区间



没有最大元与最小元

比柱体多了实数

构成了 $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, 字典序) 的序拓扑的基 ←



横坐标相同的 p,q (p,q) 为纵线

字典序拓扑比标准拓扑严格精细

③ 取 $I=[0,1]\subseteq(\mathbb{R},<)$，则 $(I,<)$ 有最大元 1，最小元 0

在对应的序拓扑中 $(\frac{1}{2},1]$ 是开集　$(\frac{1}{2},2)\cap I=(\frac{1}{2},1]$

设 X 为全序集，以下三类集合

i) 开区间 (a,b)

ii) $(a,M]$ 若 X 有最大元 M，当 X 无最大元时 $(a,+\infty)=\bigcup_{b\in(a,+\infty)}(a,b)$

iii) $[m,a)$ 若 X 有最小元 m 射线

构成序拓扑的基

例 i) $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}$，字典序$)$

ii) $(I\times I=[0,1)\times[0,1]$，字典序$)\subseteq(\mathbb{R}\times\mathbb{R}$，字典序$)$

取 $p=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，$q=(\frac{1}{2},1)$ $(p,q)\cap I^2$ 是相对开集 不是 I 的序拓扑中开集

任何包含 $(\frac{1}{2},1)$ 的开集一定有比之更大的元素

证 Y 的子拓扑有子基 $\{(a,+\infty)\cap Y\mid a\in X\}\cup\{(-\infty,a)\cap Y\mid a\in X\}$

下证 $(a,+\infty)\cap Y$ 或 $(-\infty,a)\cap Y$ 都是序拓扑中的开集

i) $a\in Y$ ii) $a\notin Y$，此时 $(a,+\infty)\cap Y=\phi$ 或 Y，否则 $\exists\, y_1\in(a,+\infty)\cap Y$，

以及 $y_2\in Y\setminus(a,+\infty)$，即 $y_1>a$，$y_2\leq a\ (\Rightarrow y_2<a)$

而 $y_1,y_2\in Y$，由凸条件 $\Rightarrow(y_2,y_1)\subseteq Y$

但 $a\in(y_2,y_1)\subseteq Y$，与 $a\notin Y$ 矛盾.

闭集和闭包

设 X 为拓扑空间，记 $\mathcal{F}=\{B\mid B$ 为 X 中闭集$\}$，则 $\mathcal{F}$ 满足：

i) $\phi,X\in\mathcal{F}$

ii) $\mathcal{F}$ 具有有限并性质：$\forall B_1,B_2,\dots B_k\in\mathcal{F}$，$\bigcup_{i=1}^{k}B_i\in\mathcal{F}$

$$X\setminus\left(\bigcup_{i=1}^{k}B_i\right)=\bigcap_{i=1}^{k}(X\setminus B_i)$$

iii) $\mathcal{F}$ 具有任意交性质 任给一族 $\{B_\alpha\}_{\alpha\in J}$，$B_\alpha\in\mathcal{F}$，则 $\bigcap_{\alpha\in J}B_\alpha\in\mathcal{F}$

定义：任给 $A\subseteq X$，令 $\mathcal{G}=\{B\mid B$ 为闭集且 $B\supseteq A\}$，则 $\bigcap\mathcal{G}$ 为包含 A 的最小闭集，称为 A 在 X 中闭包 记为 $\overline{A}_X$

设Y是X的子空间，$A\subseteq Y$，则A在Y中的闭包等于A在X中的闭包与Y的交

证：$\bar{A}_X$是X中闭集 $\Rightarrow$ $\bar{A}_X\cap Y$是相对闭集，且$\bar{A}_X\supseteq A$。

从而$\bar{A}_X\cap Y$是包含A的相对闭集 $\Rightarrow$ $\bar{A}_Y\subseteq\bar{A}_X\cap Y$，下证$\bar{A}_Y\supseteq\bar{A}_X\cap Y$

由于$\bar{A}_Y$是相对闭集，从而存在X中闭集B，s.t. $\bar{A}_Y=B\cap Y$，此时$B\supseteq A\Rightarrow B\supseteq\bar{A}_X$

所以$\bar{A}_Y=B\cap Y\supseteq\bar{A}_X\cap Y$ （由于$\bar{A}_X$是X中包含A的最小闭集）

例：$X=\mathbb{R}$，$A=(0,1)$ 则$\bar{A}=[0,1]$

$[0,1]$是包含A的闭集，若其不是最小的，则有

$(0,1)\subseteq B\subsetneq[0,1]$ $\Rightarrow$ $B=A$ || $B=(0,1]$ || $B=[0,1)$ 半开半闭 不为闭集

引理 $(X,\mathcal{T})$是拓扑空间，$A\subseteq X$，则$x\in\bar{A}$ $\overset{(1)}{\Leftrightarrow}$ 对包含x的任意开集U，都有$U\cap A\neq\phi$

设$\mathcal{C}$是$\mathcal{T}$的基，则$x\in\bar{A}$ $\overset{(2)}{\Leftrightarrow}$ 对包含x的任意基元素U，都有$U\cap A\neq\phi$

证明：先证(1) $\Rightarrow$ 否则存在x的开邻域U，$U\cap A=\phi$ $\Rightarrow A\subseteq X\setminus U$ 因此有$\bar{A}\subseteq X\setminus U$

即$A\subseteq X\setminus U$ $\Rightarrow$ $\bar{A}\subseteq X\setminus U$ 矛盾

$\Leftarrow$ 若$x\notin\bar{A}$，则$x\in X\setminus\bar{A}\triangleq U$，则$U$为$x$的开邻域而$U=X\setminus\bar{A}\subseteq X\setminus A$

$\Rightarrow U\cap A=\emptyset$

由(1) $\Rightarrow$ (2)显然成立；下证由(2) $\Rightarrow$ (1)。

任取x的开邻域U，由基的性质，存在一族基元素$C_\alpha(\alpha\in J)$，($C_\alpha\in\mathcal{C}$)

s.t. $\bigcup_{\alpha\in J}C_\alpha=U$。由于$x\in U$，则$\exists\alpha_0\in J$，$x\in C_{\alpha_0}$ （C_{α_0}为包含x的元素）

由条件$C_{\alpha_0}\cap A\neq\phi$ $\Rightarrow U\cap A\neq\phi$

例：1. $X=\mathbb{R}$，$A=(0,1)$，$\bar{A}=[0,1]$，只需说明$0\in\bar{A}$，$1\in\bar{A}$

2. $X=\mathbb{R}$，$Y=[0,1]$，$A=(0,\frac{1}{2})$，则$\bar{A}_Y=\bar{A}_X\cap Y=[0,\frac{1}{2}]\cap Y=(0,\frac{1}{2})$

3. $X=\mathbb{R}$，$A=\mathbb{Q}$，则$\bar{A}=\mathbb{R}$

一般地 $\bar{A}=X\Leftrightarrow$ 任意非空开集U，$U\cap A\neq\phi$ 称A是稠密的(dense)

定义：设 $A\subseteq X$，若 $x\in\overline{A\setminus\{x\}}$，则称 x 是 A 的聚点(极限点)

全体 A 的极限点构成的集合称为 A 的极限集导，记为 A'

$x\in\overline{A\setminus\{x\}}\Leftrightarrow$ 任意 x 的邻域 U，都有 $U\cap A\setminus\{x\}\neq\phi$

$$U\cap A\setminus\{x\}=\phi\Leftrightarrow U\cap A\subseteq\{x\}\Leftrightarrow\begin{cases}U\cap A=\phi, & x\notin A\\ U\cap A=\{x\}, & x\in A\end{cases}$$

命题：$\bar{A}=A\cup A'$

证明：$A\subseteq\bar{A}$．$x\in A'\Rightarrow x\in\overline{A\setminus\{x\}}\subseteq\bar{A}$，即 $A'\subseteq\bar{A}$

反过来，证明 $A\cup A'\supseteq\bar{A}\Leftrightarrow A\supseteq\bar{A}\setminus A'$

若 $x\in\bar{A}\setminus A'$，由 (*) 知 $x\in A$ (此时对 x 的任意开邻域 U，$U\cap A$

$x \in A' \Leftrightarrow x \in \overline{A \setminus \{x\}} \Leftrightarrow$ 对x任意的开邻域U, $U \cap A \setminus \{x\} \neq \phi$

命题 $\bar{A} = A \cup A'$

例 ① $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$, 则$\bar{A} = \{0\} \cup A$

$0 \in \bar{A} \Leftrightarrow 0$的任意开邻域$(-\varepsilon, \varepsilon) \cap A \neq \phi$ 去掉$\frac{1}{n}$后为空集

$A' = \{0\}$, $\frac{1}{n}$ 不是极限点、$\Leftrightarrow$ 任取ε充分小, 则$(\frac{1}{n}-\varepsilon, \frac{1}{n}+\varepsilon) \cap A = \{\frac{1}{n}\}$

② $A = (0,1)$. 则$\bar{A} = [0,1] = A'$

③ $X = \{a,b\}$, $\mathcal{T} = \{\phi, \{a\}, X\}$ 人为构造的拓扑

$A = \{a\}$, 则$\bar{A} = X$, $A' = \{b\}$ 此处略微抽象

极限的分离定理

$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ $(x_n, a \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow$ 对包含a的任意开邻域U,

$\exists N$, s.t. $n > N$, $x_n \in U$

定义 假设X为拓扑空间, $(x_n)_{n=1}^{+\infty}$ 为X中序列, 称$(x_n)_{n=1}^{+\infty}$ 收敛到a, 若对包含a的任意开邻域U $\exists N$, s.t. $n \geq N$, $x_n \in U$

定义 设X为拓扑空间 1 $\forall x \in X$, $\{x\}$是闭集, 则称X为T_1空间

2 $\forall x \neq y \in X$, $\exists$开集U, V, s.t. $U \ni x$, $V \ni y$, $U \cap V = \phi$

则称X为T_2空间 [Hausdorff空间]

$T_2 \Rightarrow T_1$: 给定$x \in X$, $\forall y \in X \setminus \{x\}$, 由$T_2$, $\exists$开集U_y, V_y [与y变化有关]

s.t. $U_y \ni x$, $V_y \ni y$, $U_y \cap V_y = \phi$. $X \setminus \{x\} = \bigcup\limits_{y \in X \setminus \{x\}} V_y$ 为开集.

例 $X = \{a,b\}$, $\mathcal{T} = \{\phi, \{a\}, X\}$

$(a)_{n=1}^{+\infty}$ 既收敛到a, 又收敛于b (对任意包含b的开区间取X)

因此在空间X中极限不唯一

引理：若X为T_2空间，极限存在的话，则唯一

反证：设$(x_n)_{n=1}^{+\infty}$收敛于a，又收敛于b $(a\neq b)$

从而有a，b的开邻域U，V s.t. $U\cap V=\emptyset$ 由收敛定义$\Rightarrow$

$\exists N_1$ s.t. $n\geq N_1$时，$x_n\in U$，$\exists N_2$，s.t. $n\geq N_2$时 $x_n\in V$

因此当$n\geq \max\{N_1,N_2\}$时，$x_n\in U\cap V$，矛盾．#

引理：设X为T_1空间，则$x\in A' \Leftrightarrow$ 对x的任何开邻域U，$U\cap A$为无限集

证明：$\Leftarrow$ $U\cap A\setminus\{x\}$非空，从而由闭包判别法，知$x\in\overline{A\setminus\{x\}}$

$\Rightarrow$ 闭集具有有限并的性质因此，有限集为闭集，无限集为开集

T_1空间中有限集是闭集（闭集的有限并是闭集）

反证法：假设$U\cap A$为有限集，则$U\cap A\setminus\{x\}$也为有限集

从而为闭集 令$V=U\setminus(U\cap A\setminus\{x\})$ [去掉x使得V为包含x的开集]

则V为x的开邻域，且$V\cap A\setminus\{x\}=\emptyset$ [集合的运算]

这与$x\in A'$矛盾

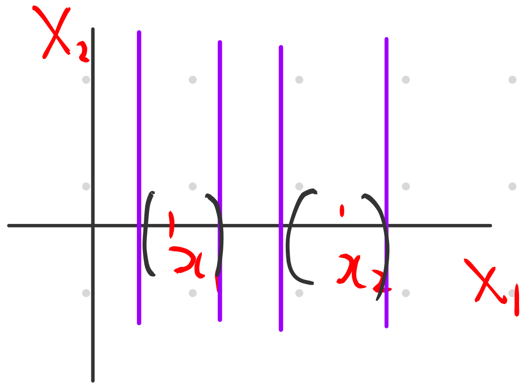
引理：①度量拓扑是T_2，序拓扑是T_2

$d(x,y)>\nu>0$，取$U=B_d(x,\frac{\nu}{2})$ $V=B_d(y,\frac{\nu}{2})$ 即可

若$\exists z$，s.t. $x<z<y$，取$U=(-\infty,z)$，$V=(z,+\infty)$

若不存在这样的z，取$U=(-\infty,y)$，$V=(x,+\infty)$

②T_i空间的乘积为T_i $(i=1,2)$



③T_i空间的子空间为T_i

Y是X的子空间

U，V为X的开集 相交为$\emptyset$

U，V与Y取交后的相对开集仍相交为$\emptyset$，因此Y为T_2

命题 设 (X,d) 为度量空间. $|x_n-x| \to d(x_n,\varepsilon)$

① $(x_n)_{n=1}^{+\infty}$ 收敛到 x $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}^*$, 当 $n\geq N$ 时 $d(x_n,x)<\varepsilon$

$\Rightarrow$ 取 $U=B_d(x,\varepsilon)$, 则 U 为 x 的开邻域

$\Leftarrow$ 对 x 的任意开邻域 U, $\exists\varepsilon>0$, s.t. $B_d(x,\varepsilon)\subseteq U$, 从而当 $n\geq N$ 时 $x_n\in U$

② $A\subseteq X$, 则 $x\in\bar{A}$ $\Leftrightarrow$ $\exists A$ 中序列 $(x_n)_{n=1}^{+\infty}$ 收敛到 x.

$\Leftarrow$ 对所有的拓扑空间成立. 任取 x 的开邻域 U, 由收敛的定义知 $n\geq N$ 时, $x_n\in U$, 又 $x_n\in A$ $\Rightarrow$ $U\cap A\neq\phi$

对于 x 的任意开邻域 $U\cap A\neq\phi$, 根据闭包判别法, $x\in\bar{A}$

$\Rightarrow$ 若 $x\in\bar{A}$, 则对于任意 $n\geq1$, $B_d(x,\frac{1}{n})\cap A\neq\phi$ [闭包判别法]

任取 $x_n\in B_d(x,\frac{1}{n})$ 因此得到 A 中序列 $(x_n)_{n=1}^{+\infty}$ 且收敛于 x.

对一般拓扑空间 (没有度量) 不成立!!!

如果空间不满足②性质, 则该空间不为拓扑空间

推论:

③ $A\subseteq X$ 是闭集 $\Leftrightarrow$ A 中的任意收敛序列的极限仍在 A 中

$\Rightarrow$. A 为闭集, 则 $A=\bar{A}$, 因此极限点 $x\in\bar{A}=A$

$\Leftarrow$ 任取闭包 $\bar{A}$ 的点, 则该点在 A 中, 因此 $\bar{A}\subseteq A$, 则 $\bar{A}=A$

(可以有限个与 x 相等)

$x\in A'$ $\Leftrightarrow$ $\exists A$ 中的序列 $(x_n)_{n=1}^{+\infty}$, $x_n\neq x$, 且 $(x_n)_{n=1}^{+\infty}$ 收敛到 x,

$\Leftarrow$ 对所有的拓扑空间成立

$\Rightarrow$ $B_d(x,\frac{1}{n})\cap A$ 为无限集. 可选 $x_n\in B_d(x,\frac{1}{n})\cap A\setminus\{x\}$

推论 设 $A\subseteq\mathbb{R}$, 则 $x\in\bar{A}$ $\Leftrightarrow$ $\exists A$ 中序列 $(x_n)_{n=1}^{+\infty}$ s.t. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$

特别地 若 $A\neq\phi$ 且有上界, 则 $\sup A\in\bar{A}$.

连续映射

定义：设X, Y是拓扑空间. $f: X\to Y$为映射. 给定$x\in X$, 称f在x处连续, 若对f(x)的任意开邻域V, 都有x的开邻域U, s.t. $f(U)\subseteq V$ ($\Leftrightarrow U\subseteq f^{-1}(V)$)

若f处处连续, 则称f连续

命题 以下等价

(1) f连续

(2) 对Y中任意开集V, $f^{-1}(V)$是X中开集

(3) 对Y中任意闭集B, $f^{-1}(B)$是X中闭集

(4) 对X中任意子集A. $f(\bar{A})\subseteq\overline{f(A)}$

证明 (1)$\Rightarrow$(2) 若$f^{-1}(V)=\phi$

若$f^{-1}(V)\neq\phi$, 任取$x\in f^{-1}(V)$, 由f在x处连续, 存在x的开邻域U_x, s.t. $U_x\subseteq f^{-1}(V)$, 从而$f^{-1}(V)=\bigcup_{x\in f^{-1}(V)}U_x$ 为开集

(2)$\Rightarrow$(1) 取$U=f^{-1}(V)$

(2)$\Rightarrow$(3). 对Y中的任意开集C, 都有 $\underset{闭集}{X\setminus f^{-1}(C)}=f^{-1}(\underset{\{x\mid f(x)\notin C\}}{X\setminus C})$ 闭集的原像

(3)$\Leftrightarrow$(4) $\Rightarrow$ 取$B=\overline{f(A)}$ $\Rightarrow f^{-1}(B)\supseteq A$ $\{x\mid f(x)\notin C\}$

由闭包定义 $\Rightarrow f^{-1}(B)\supseteq\bar{A}\Leftrightarrow f(\bar{A})\subseteq B=\overline{f(A)}$

$\Leftarrow$: 对闭集B, 令$A=f^{-1}(B)$, 由$f(\bar{A})\subseteq\overline{f(A)}$

而$f(A)\subseteq B \xRightarrow[由于B为闭集]{闭包定义} \overline{f(A)}\subseteq B$, 因此$f(\bar{A})\subseteq B\Leftrightarrow\bar{A}\subseteq f^{-1}(B)=A$, 从而$\bar{A}=A$, A为闭集

引理：设$f: X\to Y$为拓扑空间之间的映射, S是Y上拓扑的子基, 若$\forall V\in S$, $f^{-1}(V)$都是开集, 则f是连续的

证明. 用$\mathcal{B}$表示S生成的基 $\mathcal{B}=\{V_1\cap V_2\cdots\cap V_k\mid V_i\in S\}$

由 $f^{-1}(V_1\cap V_2\cdots\cap V_k)=\bigcap_{i=1}^{k}f^{-1}(V_i)$

右端由假设是有限多个开集的交，从而为开集，即每个基元素的原像都是开集，任意开集 V，由基的性质，$\exists C_\alpha \in \mathcal{B}$，s.t $V = \bigcup_{\alpha \in J} C_\alpha$

由 $f^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha \in J} f^{-1}(C_\alpha)$ 知 $f^{-1}(V)$ 为开集.

引理. 设 (X,d)，(Y,ρ) 为度量空间 if $f: X \to Y$ 为映射，则 f 在 x 处连续

(1) $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，s.t 当 $d(x', x) < \delta$ 时，$\rho(f(x'), f(x)) < \varepsilon$

(2) $\Leftrightarrow$ 若 $\lim\limits_{i \to +\infty} x_i = x$，则 $\lim\limits_{i \to +\infty} f(x_i) = f(x)$

证明. (1) $\Rightarrow$：取 $V = B_\rho(f(x), \varepsilon)$ V 是 Y 中开集包含 $f(x)$ 的度量球

因连续定义，$f^{-1}(V)$ 包含 x 的开邻域，记为 U

由度量拓扑的定义知，$\exists \delta > 0$，s.t $B_d(x, \delta) \subseteq U$.

从而 $f(B_d(x, \delta)) \subseteq f(U) \subseteq V = B_\rho(f(x), \varepsilon)$ 再将其用度量描述即可

$\Leftarrow$ 对 $f(x)$ 的任意开邻域 V，有 $\varepsilon > 0$，s.t $V \supseteq B_\rho(f(x), \varepsilon)$，由条件

$\Rightarrow$ $\exists \delta > 0$，s.t $B_\rho(f(x), \varepsilon) \supseteq f(B_d(x, \delta))$ 令 $U = B_d(x, \delta)$

则 $U \subseteq f^{-1}(B_\rho(f(x), \varepsilon)) \subseteq f^{-1}(V)$ 则 f 在 x 处连续.

(2) $\Rightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$，由条件 $\exists \delta$，s.t $d(x', x) < \delta$ 时 $\rho(f(x'), f(x)) < \varepsilon$

因 $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ 收敛到 x，对上面的 $\delta > 0$，$\exists N$，s.t 当 $i > N$ 时 $d(x_i, x) < \delta$，

从而 $\rho(f(x_i), f(x)) < \varepsilon$，即 $(f(x_i))_{i=1}^{\infty}$ 收敛到 $f(x)$

$\Leftarrow$ 若对某个 $\varepsilon_0 > 0$，对任意的 $\frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$，都有 x_n 满足 $d(x_n, x) < \frac{1}{n}$

但 $\rho(f(x_n), f(x)) \geq \varepsilon_0$ 此时 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 收敛到 x，但 $f(x_n)$ 不收敛到 $f(x)$.

矛盾.

例：设 $f: [0,1] \to \mathbb{R}^2$，记 $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$

则 f 在 x 处连续 $\overset{\text{引理}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，s.t. $|x' - x| < \delta$ 时 $d_2(f(x'), f(x)) < \varepsilon$

$\Leftrightarrow$ $d_\infty(f(x'), f(x)) < \varepsilon$ $\Leftrightarrow$ $\max\{|f_1(x') - f_1(x)|, |f_2(x') - f_2(x)|\}$

$\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，s.t $|x' - x| < \delta$ 时，$|f_1(x') - f_1(x)| < \varepsilon$ 且 $|f_2(x') - f_2(x)| < \varepsilon$

⟺ f_1, f_2 存在 x处连续

例: 映射 $\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\xrightarrow{m}\mathbb{R}$ $m(x,y)=xy$, m是连续的

$\Rightarrow m^{-1}(1)=\{(x,y)\mid xy=1\}$

任给连续函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 则 $\{(x,f(x))\mid x\in\mathbb{R}\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的闭子集.

令 $h:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为 $h(x,y)=y-f(x)$, h为连续映射(引理)

$\Rightarrow h^{-1}(0)=\{(x,y)\mid y=f(x)\}$ 为闭集

定义 设 $f:X\to Y$ 是拓扑空间之间的1-1映射, $U=f^{-1}(f(U))$

若 f, f^{-1} 均连续, 则称 f 为同胚 (自同胚 $f:X\to X$)

f连续 ⟺ 对Y中任意开集V, $f^{-1}(V)$ 为开集

⟺ 取 $U=f^{-1}(V)$ 为开集, 则 $f(U)$ 为开集

⟺ 若 $f(U)$ 为开集, 则U为开集.

f^{-1}连续 ⟺ 对X中任意开集U, $(f^{-1})^{-1}(U)=f(U)$ 为开集.

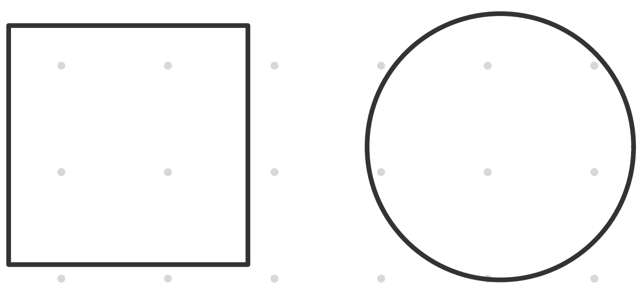
定义 设 $f:X\to Y$ 为映射, 若对X中任意开集U, $f(U)$ 为开集, 则称 f为开映射

例: ① $\mathbb{R}$的任意非空开区间(a,b)与标准区间$(0,1)$同胚 与 $\mathbb{R}$同胚

令 $h:(a,b)\to(0,1)$ $h(x)=\frac{x-a}{b-a}$. (初等函数连续 则 h, h^{-1} 均连续同胚

考虑 $\tan x$: $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\to\mathbb{R}$. 一一映射. tan 与 $\tan^{-1}$ 均连续同胚

但 $(0,1)$ 与 $(0,1)\cup(2,3)$ 不同胚

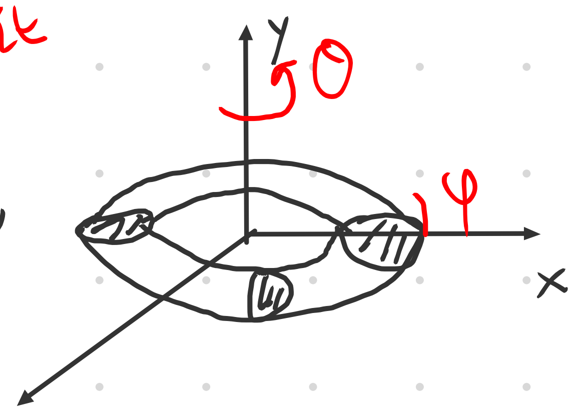
② 

不包含边框的正方形与圆盘同胚 且均与 $\mathbb{R}^2$ 同胚

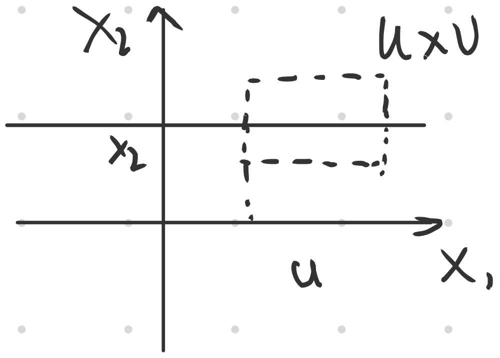
令 $h(r,\theta)=(\tan\frac{\pi}{2}r,\theta)$. h为同胚 描述同胚而非完全构造映射

③ $S^1=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}\subseteq\mathbb{R}^2$ （$S^1\times S^1$ 为积拓扑）同胚于

旋转圆环　　　　φ　θ　参数化



④ 对乘积空间 $X_1\times X_2$，任给 $x_2\in X_2$，$X_1\times\{x_2\}$ 与 X_1 同胚：$(x_1,x_2)\xrightarrow{\pi_1}x_1$



线性空间 同构 ⇒ 线性同构

例1：考虑 $id:\mathbb{R}_l\to\mathbb{R}$ 恒同变换 是连续的一一映射 但不是同胚.
下限拓扑

定义. 设 $f: X\to Y$ 为拓扑之间的连续单射. 若 X 与 $f(X)$（子拓扑）同胚，则称 f 是（拓扑）嵌入. 当 f 也是满射时，嵌入=同胚

例1：$f:[0,1]\to\mathbb{R}^2$，$f(x)=(\cos 2\pi x,\sin 2\pi x)$

f 不是嵌入 ⇔ $f:[0,1]\to(S^1,$ 子拓扑$)$ 不是同胚

$[0,\frac{1}{2})$ 是 $[0,1]$ 中（相对）开集（子拓扑中的开集），而 $f(U)$ 不是开集

A点处矛盾（$f(U)$ 没有A点开邻域）

引理. 设 $f: X\to Y$ 为嵌入，$A\subseteq X$，则 $f|_A: A\to Y$ 也为嵌入

证明. ① f 连续 $\xRightarrow{\text{易证}}$ $f|_A$ 连续.

② $f|_A: A\to(f(A),$ 子拓扑$)$ 为开映射

任取A的相对开集 $W=U\cap A$，其中 U 为 X 中开集

$f|_A(W)\overset{\text{单射}}{=}f(U)\cap f(A)$，由 f 为嵌入知 $f(U)$ 为 $f(X)$ 中相对开集，

即存在 Y 中开集 V，s.t. $f(U)=V\cap f(X)$ 从而 $f|_A(W)=V\cap f(X)\cap f(A)=V\cap f(A)$

为 $f(A)$ 中相对开集

连续映射的性质：

命题 ①常值映射连续（$f: X\to Y$，$\exists y_0\in Y$，s.t $f(x)=y_0$，记为C_{y_0}）

② A是X的子空间 $i: A\to X$是连续的，$i^{-1}(U)=U\cap A$

③ 设$f: X\to Y$连续，$A\subseteq X$，则$f|_A$ $A\to Y$连续

$f|_A: A\xrightarrow{i} X\xrightarrow{f} Y$ 为连续映射的复合，从而是连续映射.

$(f\circ g)^{-1}(U)=f^{-1}\circ(g^{-1}(U))$

④ 若$f: X\to Y$连续 $\Leftrightarrow$ $\bar{f}: X\to (f(X)$子拓扑)连续

$\Rightarrow$ 任取$f(X)$中相对开集$W=V\cap f(X)$，$\bar{f}^{-1}(W)=f^{-1}(W)=f^{-1}(V)\cap f^{-1}(f(X))$

$=f^{-1}(V)$为开集

$\Leftarrow$ $f: X\xrightarrow{\bar{f}} f(X)\xrightarrow{i} Y$ 为连续函数的复合 因此连续

⑤ 设$f: X\to Y$为映射，U_α $(\alpha\in J)$是X上一族开集，且$\bigcup_{\alpha\in J}U_\alpha=X$，则

f连续$\Leftrightarrow$ $f|_{U_\alpha}: U_\alpha\to Y$ 连续

$\Rightarrow$已证

$\Leftarrow$ 任取Y中开集V，则$f^{-1}(V)=\bigcup_{\alpha\in J}(f^{-1}(V)\cap U_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in J}f|_{U_\alpha}^{-1}(V)$

由$f|_{U_\alpha}: U_\alpha\to Y$ 连续 $\Rightarrow$ $f|_{U_\alpha}^{-1}(V)$是U_α中的相对开集

而U_α为开集（开集中相对开集为大空间开集）

$\Rightarrow f|_{U_\alpha}^{-1}(V)$是X中开集 $\Rightarrow$ $f^{-1}(U)$是X中开集

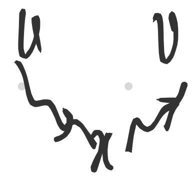
定义 3.3.1. 设x,y是拓扑空间X两点，若连续映射$\gamma:[0,1]\to X$满足$\gamma(0)=x,\gamma(1)=y$，则称γ为连接x,y的道路。若X中任意两点都有道路连接，则称X是道路连通的。若子集Y在子拓扑下道路连通，则称Y道路连通。

道路连通 ⇒ 连通. 设X道路连通但C-D为X的分割. 取$x\in C$ $y\in D$. 由道路连通的假设 $\exists\gamma:[0,1]\to X$ s.t. $\gamma(0)=x\in C$ $\gamma(1)=y\in D$ (*)

$\mathrm{Im}\gamma$连通 而C-D是分割. 从而 $\mathrm{Im}\gamma\subseteq C$ 或 $\mathrm{Im}\gamma\subseteq D$ 与(*)矛盾

命题 3.3.2. $(A_\alpha)_{\alpha\in J}$是X的一族道路连通子集，设存在$x\in X$满足$x\in A_\alpha,\forall\alpha\in J$，则$\bigcup_{\alpha\in J}A_\alpha$道路连通。

证 ①设γ_1为连接u,x的道路 γ_2为连接x,v的道路



令 $\gamma(t)=\begin{cases}\gamma_1(2t), & t\in[0,\frac{1}{2})\\ \gamma_2(2t-1), & t\in[\frac{1}{2},1]\end{cases}$ $(\gamma_1(1)=\gamma_2(0)=x)$ 由黏结引理知γ连续. 即γ为连接u,v的道路

②任取$\bigcup A_\alpha$中两点u,v 设$u\in A_\alpha$, $v\in A_\beta$, A_α道路连通 ⇒ 存在连结x,v的道路, 由①知u,v之间有道路

命题 设X道路连通, $f: X\to Y$连续 则$f(X)$是Y的道路连通子集

证 不妨设f是满射. 任取Y $f(X)$中两点 $f(x_1),f(x_2)$, 由X的道路连通

知存在连续映射 $\gamma:[0,1]\to X$, $\gamma(0)=x_1$, $\gamma(1)=x_2$, 则

$f\circ\gamma:[0,1]\to f(X)$ 为连接$f(x_1),f(x_2)$的道路

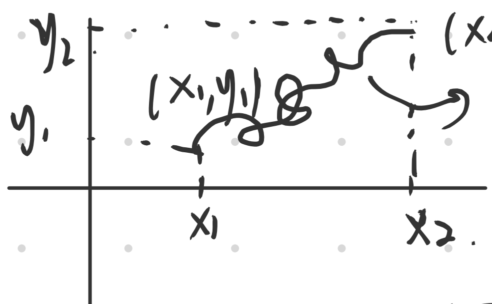
☒

命题 设X,Y是道路连通的. 则$X\times Y$也是道路连通的

证: 设(x_1,y_1) (x_2,y_2)为$X\times Y$中两点. 由X道路连通有道路

$\gamma_1:[0,1]\to X$, s.t. $\gamma_1(0)=x_1$, $\gamma_1(0)=x_2$

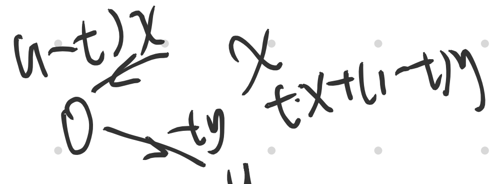
同理Y中有道路γ_2 $[0,1]\to Y$. s.t. $\gamma_2(0)=y_1$, $\gamma_2(0)=y_2$



$\gamma(t)=(\gamma_1(t),\gamma_2(t))$ 为 $X\times Y$ 中连接(x_1,y_1), (x_2,y_2)的道路 (γ的连续性依据到乘积空间$X\times Y$的连续映射的判别) ☒

例1: I. $\mathbb{R}^n$ $(n\geq 1)$ 道路连通. 取定 $0=(0,0,0)\in\mathbb{R}^n$,

则$\forall x\in\mathbb{R}^n$, $\gamma(t)=tx$, $t\in[0,1]$ 为连接$0\sim x$的道路



2. $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ 是道路连通的

若 x, y 的连线不经过 0，则 $\gamma(t)=tx+(1-t)y$ 为道路

若连线经过0，在"直线" OX 外任取一点 z，用折线 $xz+zy$ 作为道路.

$S^n=\{(x_1,\dots,x_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1}x_i^2=1\}$ 是道路连通的

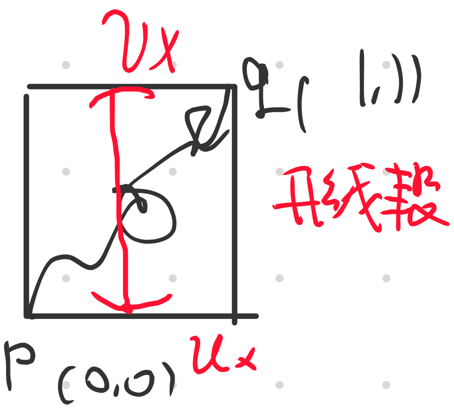
$\pi: \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}\to S^n$, $\pi(x)=\frac{x}{|x|}$

3. I_o^2 连通但不是道路连通：

设存在 $\gamma: [0,1]\to I_o^2$ s.t. $\gamma(0)=p$, $\gamma(1)=q$

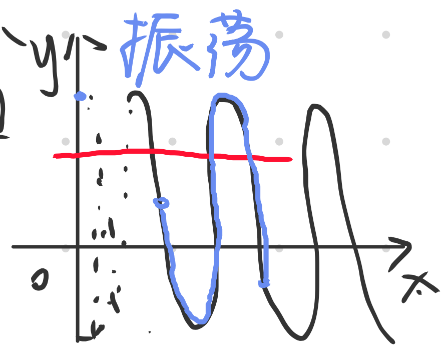
$\gamma(1)=q$ 由介值定理 $\Rightarrow \gamma$ 是满射 ①

任取 $x\in[0,1]$，则 (u_x, v_x) 为 I_o^2 中的开区间，从而 $\gamma^{-1}(u_x, v_x)$ 为 $[0,1]$ 中开集 ②



①② $\Rightarrow \gamma^{-1}(u_x, v_x)$ 为互不相交的非空开集

而 $[0,1]$ 中互不相交的开集至多可数个，矛盾



4. 令 $A=\{(x, \sin\frac{1}{x}) \mid x\in(0,1]\}\subseteq\mathbb{R}^2$

与 $(0,1]$ 同胚 $\Rightarrow$ A 道路连通 $\Rightarrow$ 连通

从而 $\bar{A}$ 连通，$\bar{A}=A\cup\{0\}\times[-1,1]$ 称为拓扑学家正弦曲线

$\bar{A}$ 不是道路连通的：反证法 设 $(0,0)$, $(1,\sin 1)$ 有道路连接

记为 $\gamma(t)$ 令 $T=\sup\{t \mid \gamma(t)\in\{0\}\times[0,1]\}$

$(1,\sin 1)$

max

$\gamma(t)\in\{0\}\times[0,1] \Leftrightarrow t\in\gamma^{-1}(\{0\}\times[0,1])$ 闭集

从而 $T<1$. 即 $\gamma([T,1])\subseteq A$

分析：$r:[0,1]\to \bar{A}$ 由连续性 $\lim\limits_{t\to T^+} r(t)=r(T)$

另一方面 $t>T$，$r(t)\in A$，从而可设 $r(t)=\left(x(t), \sin\frac{1}{x(t)}\right)$

下面取 $t_n>T$，$t_n\to T$ 且 $\sin\frac{1}{x(t_n)}=(-1)^n$ 从而

$\sin\frac{1}{x}=(-1)^n \iff x=\dfrac{1}{\varphi_0+2k\pi}$，其中 $\sin\varphi_0=(-1)^n$，$k\geq 0$

即 x 可以任意小

当 $n=1$ 时，取 $t_1\in(0, x(1)=1)$，使得 $x(t_1)$ 满足 $\sin\frac{1}{x(t_1)}=1$

对一般的 n，取 $u\in\left(0=x(0), x(\frac{1}{n})\right)$，s.t. $\sin\frac{1}{u}=(-1)^{n+1}$

在 $[0,\frac{1}{n}]$ 上对 $x(t)$ 用介值定理 $\Rightarrow$ 存在 $t_{n+1}\in(T,T+\frac{1}{n})$ s.t. $x(t_{n+1})=u$

从而 $\left(x(t_{n+1}), \sin\frac{1}{x(t_{n+1})}\right)=\left(x(t_{n+1}), (-1)^{n+1}\right)$.

从而由归纳法构造出所需的序列。

连通分支和局部连通性

定义：设 X 为拓扑空间. 对 $x\in X$，包含 x 的所有道路连通子集的并

称为 x 的道路连通分支

在 X 上定义 $\sim$ $x\sim y \iff$ 存在连通子集 A 满足 $x\in A$ 且 $y\in A$

- $x\sim x$：取 $A=\{x\}$
- $x\sim y \Rightarrow y\sim x$.
- $\underbrace{x\sim y}_{A}$，$\underbrace{y\sim z}_{B} \Rightarrow A\cup B$ 包含 x,z 的连通子集，即 $x\sim z$

引理 在如上的定义下，$[x]$ 等价类 $=$ x 的连通分支.

由之前的命题知，x 的连通分支是连通包含 x 的，从而连通分支为包含 x 的最大连通子集.

以上讨论对道路分支也成立（$x\sim y \iff$ 存在连接 x,y 的道路）.

引理 ①每个连通分支为若干道路连通分支的并
② 连通分支是闭集.

例1. ① A 有两个连通分支

② $\mathbb{Q}$ 作为 $\mathbb{R}$ 的子空间的连通分支为单点集 若 $x\in A$, 当 $A\neq\{x\}$ 时, A是不连通的

局部连通定义. 设 $x\in X$, 若对包含 x 的任意开邻域 U, 存在 x 的开邻域 $V\subseteq U$, 且 V 是连通的, 则称 X 在 x 处局部(道路)连通
处处局部(道路)连通则称 X 局部(道路)连通

例1. A 不是局部连通

引理: X 局部(道路)连通 $\Leftrightarrow$ 任意一开集的(道路)连通分支为开集

证: 只证连通的情况 推论: X 的开集也是局部(道路)连通的

$\Rightarrow$ 任取开集 $U\subseteq X$, P为U的一个连通分支, $\forall x\in P\subseteq U$
由局部连通定义, $\exists x$ 的开邻域 $V\subseteq U$, V是连通的 由连通分支的定义知 $V\subseteq P$, 从而 P为 X 中开集

$\Leftarrow$ 任给开集 U 以及 $x\in U$, 对U用右边的假设
U中包含 x 的连通分支是开集 则 $x\in V\subset U$, 从而X局部连通

命题: X局部道路连通, 则X的连通分支为道路连通分支.

证: 任取X的道路分支P, 给证P是道路连通的 将P
分成道路连通分支的并. 由引理 ⇒ P为开集
对P用引理 ⇒ C_α 为开集 $\alpha\in J$
若J不是单元素集, 则 $P=C_0\cup(\bigcup_{\alpha\neq 0} C_\alpha)$ 为P的分割
从而J=1

例 $\mathbb{R}^n$是局部道路连通的，$\mathbb{R}^n$的任意开子集U是局部道路连通的，从而U的道路连通分支=连通分支

紧致性：

定理① 设$f:[0,1]\to\mathbb{R}$连续，则存在$x\in[0,1]$ s.t. $f(x)=\max\{f(s)\mid s\in[0,1]\}$

② $f:[0,1]\to\mathbb{R}$连续 $\Rightarrow f$一致连续

本质：

定义：任给集合，$\mathcal{A}$是X上的子集族，$\mathcal{A}=\{A_\alpha\mid\alpha\in J\}$

若$\cup\mathcal{A}\ (=\bigcup_{\alpha\in J}A_\alpha)=X$，则称$\mathcal{A}$是$X$的覆盖

若X是拓扑空间，$\mathcal{A}$为X的覆盖，且$\mathcal{A}$的元素是X中开集，则称$\mathcal{A}$为开覆盖、

若A是X的子集，$\cup\mathcal{A}\supseteq A$，也称$\mathcal{A}$是$A$的覆盖

定义：设X是拓扑空间，如果对X的任意开覆盖$\mathcal{A}$都$\exists\mathcal{A}$的有限子集也是X的覆盖，则称X是紧致的空间(compact)

设$\mathcal{A}=\{A_\alpha\mid\alpha\in J\}$，$A_\alpha$是开集，则存在有限个$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k$, s.t. $\bigcup_{i=1}^{k}A_{\alpha_i}=X$

引理：设A是X的子空间，则A紧致 $\Leftrightarrow$ A的任意一族由X中开集构成的A的覆盖，都有有限子覆盖 ①

即$A\subseteq\bigcup_{\alpha\in J}U_\alpha$，$\exists\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k$ s.t. $\bigcup_{i=1}^{k}U_{\alpha_i}\supseteq A$

证：$\Rightarrow$ 若$A\subseteq\bigcup_{\alpha\in J}U_\alpha\Rightarrow A=\bigcup_{\alpha\in J}(U_\alpha\cap A)$ 相对开集覆盖

$\Leftarrow$ 设$\bigcup_{\alpha\in J}V_\alpha=A$，$V_\alpha$是$A$中的相对开集 $\Rightarrow V_\alpha=U_\alpha\cap A$

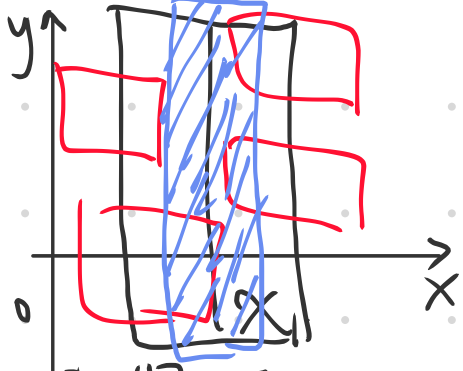
引理：设$\mathcal{C}$是X上拓扑的基，则A是紧致 $\Leftrightarrow$ A的任意一族由基元素构成的覆盖有有限子覆盖 ②

证 ①$\Rightarrow$② 设$\bigcup_{\alpha\in J}U_\alpha\supseteq A$，$U_\alpha$是$X$中的开集，由拓扑基的性质

$\Rightarrow U_\alpha=\bigcup_{\beta\in J_\beta}C_{\alpha\beta}$，$C_{\alpha\beta}\in\mathcal{C}$，从而$\bigcup_{\substack{\alpha\in J\\ \beta\in J_\beta}}C_{\alpha\beta}\supseteq A$

由 $\Rightarrow\bigcup_{i=1}^{k}C_{\alpha_i\beta_i}\supseteq A\Rightarrow\bigcup_{i=1}^{k}U_{\alpha_i}\supseteq A$

定理：设 X_1, X_2 为紧空间，则 $X_1\times X_2$ 为紧空间.



证明 设 $\{U_\alpha\times V_\alpha \mid \alpha\in I\}$ 为 $X_1\times X_2$ 的开覆盖

任取 $x_1\in X_1$，$\{x_1\}\times X_2$ 与 X_2 同胚（投影映射）从而为紧子集

所以存在有限个 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k$ 使得 $\{x_1\}\times X_2\subseteq\bigcup_{i=1}^{k} U_{\alpha_i}\times V_{\alpha_i}$

不妨设 $x_1\in U_{\alpha_i}$ $(1\le i\le k)$ （$x_1\notin U$ 则 $U\times V\cap\{x_1\}\times X_2=\phi$）

令 $U_{x_1}=\bigcap_{i=1}^{k} U_{\alpha_i}$，则 U_{x_1} 为 x_1 的开邻域 且 $U_{x_i}\times X_2\subseteq\bigcup_{i=1}^{k} U_{\alpha_i}\times X_2$ (1)

（$\because X_2\subseteq\bigcup_{i=1}^{k} V_{\alpha_i}$）由 X_1 的紧性 $\Rightarrow$ 存在有限个 $x_1,x_2,\dots,x_n$

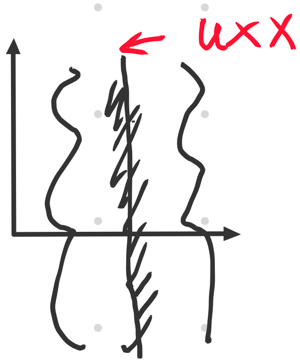
使得 $\bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}=X_1$，从而 $X_1\times X_2=\bigcup_{i=1}^{n}(U_{x_i}\times X_2)$ 由 U_{x_i} 的定义以，

$U_{x_i}\times X_2$ 可由有限个 $U_\alpha\times V_\alpha$ 覆盖，所以 $X_1\times X_2$ 可被有限个 $X_1\times X_2$ 覆盖

引理 设 X_2 为紧空间，W 为包含 $\{x_1\}\times X_2$ 的开集，则存在 x_1 的开邻域 U_1 s.t. $U_1\times X_2\subseteq W$

管状引理

有限交性质：设 X 为拓扑空间，F 是由 X 中一些闭集构成的子集族，若 F 中任意有限个元的交非空，则称 F 具有有限交性质



??

命题：X 为紧的 $\Leftrightarrow$ X 的任意满足有限交性质的闭集族 F 都有 $\bigcap F\neq\phi$

证：只需证右边 $\Leftarrow$ 左边 的逆否命题

即对一个开集族 C，若 C 无有限子覆盖，则 C 不是覆盖.

$\Rightarrow$ 任给闭集 F，设 F 具有有限交性质 令 $C=\{X\backslash B\mid B\in F\}$ 则 C 开集族

此时 C 无有限子覆盖 $\bigcup_{i=1}^{n}(X\backslash B_i)=X$ $=X\backslash\bigcap_{i=1}^{n} B_i$，$\bigcap_{i=1}^{n} B_i=\phi$ 与假

设矛盾 从而 ℓ 不是覆盖. $\bigcup_{B\in F}(X\setminus B)\neq X$ $=X\setminus\cap F$.

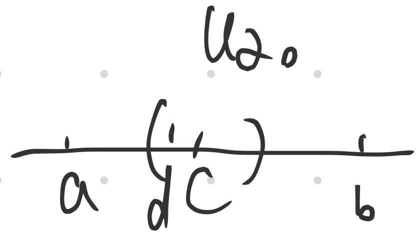
⇐ 同理

定理 设X是具有上确界性质的全序集，则X的闭区间 $[a,b]$ 是紧集.

证明: 不妨设 $a<b$. 设 $\bigcup_{\alpha\in J}U_\alpha\supseteq[a,b]$. 需证存在有限个 U_{α_i} 覆盖 $[a,b]$.

令 $I=\{c\in[a,b]\mid [a,c]$ 可被有限个 U_α 覆盖$\}$ 需证 $b\in I$.

① $c\triangleq\sup I\in I$　　② $\sup I=b$



由 $c\in\bigcup_{\alpha\in J}U_\alpha$ 从而 $c\in U_{\alpha_0}$.

若 $c\neq a$ 则存在 $a\le d<c$ 使得 $(d,c]\subseteq U_{\alpha_0}$.

由c的定义,知d不是I的上界 ⇒ $[a,d]$ 可被有限个 U_{α_i} ($0\le i\le n$) 覆盖

从而 $[a,c]=[a,d]\cup(d,c]\subseteq\bigcup_{i=0}^{n}U_{\alpha_i}$ 即 $c\in I$.

再证明 $c>a$, $a\in U_{\alpha'}$ 而a不是最大元 从而存在 $a<d\le b$

$[a,d)\subseteq U_{\alpha'}$ 再取 $U_{\beta'}$ 包含 d 则 $[a,d]\subseteq U_{\alpha'}\cup U_{\beta'}$

即 $d\in I$, 从而 $c>a$.

② 若 $c\triangleq\sup I<b$, 取 U_{α_0} 包含 c. 则存在 $c<d\le b$, s.t.

$[c,d)\subseteq U_{\alpha_0}$ 再取 U_β 包含 d　$[c,d]\subseteq U_{\alpha_0}\cup U_\beta$

$[a,c]$ 由① 可由有限个 U_{α_i} ($0\le i\le n$) 覆盖

$[a,d]=[a,c]\cup[c,d]\cup\{d\}\subseteq\bigcup_{i=0}^{n}U_{\alpha_i}\cup U_\beta$ 即 $d\in I$ 这与c的定义矛盾

例：① $[0,1]$ 是紧集

② $(\mathbb{R}^n, d_2)$ 的有界闭集为紧集，反之也成立。

设 A 为 $(\mathbb{R}^n, d_2)$ 的有界子集 $(\operatorname{diam} A < +\infty) \Rightarrow \exists R > 0$

s.t. $A \subseteq B_0(R, d_2) \subseteq [-R, R]^n$.

设 A 为有界闭集，则 A 为 $[-R,R]^n$ 的闭子集，由定理 $[-R,R]$ 为紧集，

$\Rightarrow [-R,R]^n$ 为紧集，再由紧空间的闭子集为紧集 $\Rightarrow A$ 为紧集

反过来，设 A 为紧集，先证 A 有界，$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_0(n, d_2) \Rightarrow A \subseteq B$

命题：设 X 为 Hausdorff 空间，$A \subseteq X$ 为紧子集，则 A 为闭集。

证明：任取 $x \in X \setminus A$，对 $a \in A$，由 Hausdorff 性质有

开集 $U_a \ni a$，开集 $V_a \ni x$，$U_a \cap V_a = \phi$

由 A 为紧集，知存在有限个 $a_1, a_2, \cdots a_n$ s.t. $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_{a_i} \supseteq A$ (开覆盖)

令 $V_x = \bigcap_{i=1}^{n} V_{a_i}$

则 $V_x \cap A = \phi$ 实际上 $V_x \cap U_{a_j} = \phi \Rightarrow V_x \cap$