预备数分、高代知识:

压缩映射 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义，且 $f([a,b]) \subset [a,b]$，且满足 $|f(x)-f(y)| \le q|x-y|$，$\forall x,y \in [a,b]$，其中 $q \in (0,1)$，则存在唯一的 c，使 $f(c)=c$.（不动点）.

基本积分表,

基本积分表

$$\int x^{\alpha}\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C, & \alpha\neq -1,\\ \ln|x|+C, & \alpha=-1;\end{cases} \qquad \int \ln x\,\mathrm{d}x = x(\ln x-1)+C;$$

$$\int a^{x}\mathrm{d}x=\frac{a^{x}}{\ln a}+C,\text{特别地}\int \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{x}+C;$$

$$\int \sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x+C; \qquad \int \cos x\,\mathrm{d}x=\sin x+C;$$

$$\int \tan x\,\mathrm{d}x=-\ln|\cos x|+C; \qquad \int \cot x\,\mathrm{d}x=\ln|\sin x|+C;$$

$$\int \sec x\,\mathrm{d}x=\ln|\sec x+\tan x|+C; \qquad \int \csc x\,\mathrm{d}x=\ln|\csc x-\cot x|+C;$$

$$\int \operatorname{sh} x\,\mathrm{d}x=\operatorname{ch} x+C; \qquad \int \operatorname{ch} x\,\mathrm{d}x=\operatorname{sh} x+C;$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C; \qquad \int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|+C;$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C; \qquad \int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C;$$

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C;$$

$$\int\sqrt{x^2\pm a^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2\pm a^2}\pm a^2\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|\right)+C.$$

Jordan 标准形:

$$J=\begin{bmatrix} J_1 & & 0 \\ & J_2 & \\ 0 & & J_3 \end{bmatrix} \qquad J_i=\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

隐函数.

定义：函数F给出自变量、未知函数以及未知函数导数的关系式，则称$F(x, y(x), y'(x), \cdots y^{(n)}(x))=0$是微分方程(DE).

自变量 x 常微分方程 ODE

自变量 $x_1, x_2, \cdots x_n$ $F(x_1, x_2, \cdots x_n, y, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial y}{\partial x_n} \cdots)=0$ 为偏微分方程(PDE)

△ 对于复合函数 $y'(x)=y(y(x))$ 定义不为ODE.

$y'(x)+x=y(x-1)$. 不为ODE 时滞微分方程.

方程中实际出现最高阶导数的阶数，称为ODE的阶数.

$u(t, x, y)$ $\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 二阶PDE

模型自由落体：$S''(t)=g \Rightarrow \frac{d}{dt}(S')=g \Rightarrow S'=C_1+gt$

$S=\int C_1+gt\,dt=C_2+C_1t+\frac{1}{2}gt^2$. C_1, C_2为任意常数.

初始条件：$S(0)=0$ 初始位移. $S'(0)=0$ 初始速度

代入得到 $C_1=0, C_2=0$ $S=\frac{1}{2}gt^2$

实际问题 → 数学模型 → 求解 考虑实际问题

← 修正

$ms''=mg+f$ $f=-kv=-kS'$ $ms''=mg-kS'$ 二阶ODE.

定义：若函数$y=\phi(x)$在区间I上连续且关于x有直到n阶连续导数，代入方程，得到恒等式 $F(x, \phi(x), \phi'(x), \cdots \phi^{(n)}(x))=0$, $\forall x\in I$.

则称$y=\phi(x)$是n阶ODE在区间I上的解

(不考虑分段区间 只考虑1个区间)

模型：人口模型 对象：人 过程：出生、死亡、目标

数学：人口数 $p(t)$，t 时间 设 p 连续可微

出生率 b，死亡率 d

微元法：$[t, t+\Delta t]$ 上 $p(t+\Delta t)-p(t)=b\,p(t)\Delta t-d\,p(t)\Delta t$.

$\frac{p(t+\Delta t)-p(t)}{\Delta t}=(b-d)p(t)$ 令 $\Delta t\to 0$ $p'(t)=(b-d)p(t)$. 阶ODE

定义（n阶ODE一般形式）. $F(x, y(x), y'(x), \cdots y^{(n)}(x))=0$

n阶ODE标准形式. $y^{(n)}(x)=f(x, y(x), y'(x), \ldots y^{(n-1)}(x))=0$

F关于未知函数及其导函数 $y(x), y'(x), \cdots y^{(n)}(x)$ 是一次有理式，则称 $F(x, y, \cdots y^{(n)})=0$ 是线性ODE

$y'=x^2+x^3+y$

$yy'=x+10$ 二次有理式 非线性ODE

$(y+y')^2=y^2+2yy'+(y')^2$

作变换：令 $z(x)=\frac{1}{2}y^2$ $z'=x+10$ 则为线性ODE

人口模型求解：$p'(t)=(b-d)p(t)=a\,p(t)$.

1) 可以猜测 $e^{at}=p$. 但还有其他解吗？如何证明唯一性.

令 $p(t)=e^{at}u(t)$ 证明 $p(t)$ 与 $u(t)$ 一一对应.

$p'=(e^{at}u)'=ae^{at}u+e^{at}u'=ap=ae^{at}u$

$\Leftrightarrow e^{at}u'=0 \Leftrightarrow u'=0 \Leftrightarrow u=C$ 所以 $p=ce^{at}$ $(c>0)$

变量分离法：

2) $(p>0)$ $\frac{p'}{p}=a \Leftrightarrow (\ln p)'=a \Leftrightarrow \ln p=at+c$ $p=Ce^{at}$ $(c>0)$

3) $\begin{cases} p'=ap \\ p(0)=A \end{cases} \xrightarrow[p\sim p_0]{p_0=A} \begin{cases} p_1'=aA \\ p_1(0)=A \end{cases}$ $p_1(t)=A+aAt$

皮卡迭代 $\xrightarrow{p\sim p_1}$ $\begin{cases} p_2'=a(A+aAt). \\ p_2(0)=A \end{cases}$ $p_2(t)=A+aAt+\frac{1}{2}a^2At^2$.

$p_n=A(1+at+\frac{1}{2}a^2t^2+\cdots+\frac{1}{n!}a^nt^n)$

递推关系：$\begin{cases} p'_{n+1}(t)=aP_n(t) \\ p_{n+1}(0)=A \end{cases}$ 令 $n\to+\infty$ $p(t)=\lim\limits_{n\to\infty}p_n(t)=Ae^{at}$

4) $p'=ap \Leftrightarrow p'-ap=0$ （未知函数$)'=0$

积分因子法 $\mu\neq0$ $\mu(p'-ap)=$（未知函数$)'=0$

$e^{-at}(p'-ap)=(e^{-at}p)'=0 \Rightarrow e^{-at}p=C$ $p(t)=Ce^{at}$

特解：$\left.\begin{cases} p'=ap \Rightarrow p(t)=Ce^{at} \\ p(t_0)=p_0 \end{cases}\right\} \Rightarrow C=p_0e^{-at_0}$

$p(t)=p_0e^{a(t-t_0)}$ 特解

$\begin{cases} DE \\ 定解条件 \end{cases}$ 定解问题 $\begin{cases} DE \\ 初始条件 \\ (初值条件) \end{cases}$ 初值问题 (Cauchy …)

定义（通解）：含有n个独立的任意常数 $c_1, \quad c_n$ 的解，

$y=\phi(x,c_1,\cdots c_n)$ 称为n阶ODE $F(x,y,y',\ldots y^{(n)})=0$的通解

通解$\neq$所有解

不含任意取值的常数的解称为ODE的特解.

$p'=ap$，$p=ce^{at}$ 通解 $p=p_0e^{a(t-t_0)}$ 特解.

$s''=g$. $s=c_1+c_2t+\frac{1}{2}gt^2$ 通解 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 特解.

$s=c_1+\frac{1}{2}gt^2$ 不是特解也不是通解

独立. $\dfrac{\partial[\phi,\phi',\cdots\phi^{(n-1)}]}{\partial[c_1,c_2,\cdots c_n]}=\begin{vmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial c_1} & \frac{\partial\phi}{\partial c_2} & \cdots & \frac{\partial\phi}{\partial c_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial\phi^{(n-1)}}{\partial c_1} & \frac{\partial\phi^{(n-1)}}{\partial c_2} & \cdots & \frac{\partial\phi^{(n-1)}}{\partial c_n} \end{vmatrix}\neq0$

$\begin{cases} y^{(n)}=f(x,y,y',\ldots y^{(n-1)}) \Rightarrow y=\phi(x,c_1,\cdots c_n) \\ 初始条件：y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y_1,\cdots; y^{(n-1)}{}_{x_0}=y_{n-1} \end{cases}$ $\Downarrow$

得到n个等式

$$\begin{cases} \phi(x_0, c_1, \dots c_n) = y_0 \\ \phi'(x_0, c_1, \dots c_n) = y_1 \\ \vdots \\ \phi^{(n-1)}(x_0, c_1, \dots c_n) = y_{n-1} \end{cases} \xrightarrow{(*)} \begin{cases} c_1 = c_1(y_0, \dots y_{n-1}) \\ \vdots \\ c_n = c_n(y_0, \dots y_{n-1}) \end{cases}$$

利用隐函数定理(*) 雅各比矢阵由 独立条件

$y = \phi(x, c_1(y_0, \dots y_{n-1}), \cdots c_n = c_n(y_0, \dots y_{n-1}))$ 特解

二阶ODE： $F(x, y, y', y'') = 0$ ⇒ 通解 $y = \phi(x; c_1, c_2)$. c_1, c_2 为任意常数

例1: $xy = \ln y + c$ 满足1阶ODE.

关于 x 求导. $y = y(x)$ $x'y + xy' = (\ln y)'$ $y + xy' = \frac{y'}{y}$

2. $x^2 + y^2 = 2cx$ 满足1阶ODE 消去c.

$$\left.\begin{aligned} &\text{关于 } x \text{ 求导 } 2x + 2yy' = 2c \\ &c = \frac{1}{2x}(x^2+y^2) \end{aligned}\right\} \quad 2x + 2yy' = \frac{1}{x}(x^2+y^2)$$

模型: 战争模型 对象: 红军 蓝军 过程: 战斗减员, 非战斗减员 增援

目标: 正规战争战争规律 数学: 红军人数 $x(t)$, 蓝军人数 $y(t)$, 时间 t

红军战斗减员 $= ay$ a: 蓝军每个士兵杀伤率 = 射击率 × 命中率

蓝军 ～ $= bx$ b: ～

红军非战斗减员 $= \alpha x$ 增援 $u(t)$.

蓝军 ～ $= \beta x$ ～ $v(t)$.

$$\begin{cases} x' = -ay - \alpha x + u(t) \\ y' = -bx - \beta y + v(t) \\ x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{Linear ODE}$$

模型: 减肥. 对象: 体重 过程: 摄入能量, 消耗能量.

目标: 体重变化规律. 数学: 体重 $W(t)$. t 时间.

1kg 转化为 DJ 能量.

每天摄入 AJ 能量. 消耗 B $W(t)$ J 能量

微元法：$D(W(t+\Delta t)-W(t)) = (A-BW(t))\Delta t$

令 $\Delta t \to 0$. $\begin{cases} DW' = A-BW & \text{1阶 LODE.} \\ W(t_0) = W_0 \end{cases}$

$A=0$ $DW' = -BW \Rightarrow W' = -\frac{B}{D}W$ $\quad W = Ce^{-\frac{B}{D}t}$

将初值条件代入 $\Rightarrow W = W_0 e^{-\frac{B}{D}(t-t_0)}$.

$A \neq 0$ $W' = \frac{A}{D} - \frac{B}{D}W$.

$W' + \frac{B}{D}W = \frac{A}{D}$. 两边同时乘以 $e^{\frac{B}{D}t}$.

$e^{\frac{B}{D}t}W' + \frac{B}{D}e^{\frac{B}{D}t}W = e^{\frac{B}{D}t}$ $\quad (e^{\frac{B}{D}t}W)' = e^{\frac{B}{D}t}\frac{A}{D}$.

$\Rightarrow e^{\frac{B}{D}t}W = C + \frac{A}{B}e^{\frac{B}{D}t}$. $\quad W = Ce^{-\frac{B}{D}t} + \frac{A}{B}$.

或

当 $A\neq 0$ 时 设 $\tilde{W} = W - \frac{A}{B}$ $\quad \tilde{W}' = W'$

$\tilde{W}' = -\frac{B}{D}\tilde{W}$ $\quad \tilde{W} = Ce^{-\frac{B}{D}t}$ $\quad W = Ce^{-\frac{B}{D}t} + \frac{A}{B}$

一般的一阶 LODE 标准形式 $y' = p(x)y + f(x)$.

$f\equiv 0$ 齐次线性 ODE $\quad f\not\equiv 0$. 非齐次 LODE.

$p(x), f(x)$ 在 I 上连续 $C(I) = \{$在 I 上连续的函数$\}$ $p(x), f(x) \in C(I)$.

n阶 LODE 标准形式. $y^{(n)} = a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1}(x)y + f(x)$

一阶齐次 LODE $y' = p(x)y$

1) 变量分离法：$\frac{y'}{y} = p(x)$, 当 $y\neq 0$ 时. $(\ln|y|)' = p(x)$

$\ln|y| = c_1 + \int p(x)dx$ △不定积分为一族函数. 使 $\int$ 只表示一个原函数.

$|y| = e^{c_1}e^{\int pdx}$ $\quad y = \pm e^{c_1}e^{\int pdx} = ce^{\int pdx}, \forall c\neq 0$

当 $y=0$ 时, $y' = 0 = py$ $\quad$ 综上所述. $y = ce^{\int pdx}$ c 为任意常数.

2) 积分因子法：$y' - py = 0$ $\quad e^{-\int pdx}(y'-py) = 0$ $\quad (e^{-\int pdx}y)' = 0$

齐次 LODE 性质

1) 一阶齐次ODE解恒等于0或者恒不等于0

2) 一阶齐次ODE解在 $p(x)$ 有定义且连续的整个区间 I 上存在

3) 一阶齐次ODE解线性组合仍是ODE的解

解空间 = 一维线性空间 $y = Ce^{\int pdy} = Cy_1$

定义域：$xy'=4y$ 通解：$y=cx^4$，$x\in\mathbb{R}$.

$y'=\frac{4y}{x}$ 通解：$y=cx^4$，$x>0$（在1个区间上有定义 去掉 $(-\infty,0)$）

隐式解与隐式通解　显式 $y=\phi(x;c_1\cdots c_n)$　隐式 $f(x,y,c_1,\cdots c_n)=0$

独立性的满足条件：$\frac{\partial[\phi,\phi',\cdots\phi^{(n-1)}]}{\partial[c_1,c_2,\cdots c_n]}\neq 0$

Lecture 2. 一阶微分方程的求解

初等积分法. 初等函数及其积分表示ODE解.

一阶线性ODE. $y'=p(x)y+q(x)$.　$p,q\in C(I)$

$q\equiv 0$ 齐次LODE　$y'=p(x)y$　{ 变量分离 / 积分因子.

通解. $y=Ce^{\int p\,dx}$

性质：① 当 $C=0$，$y=0$，$\forall x\in I$；当 $C\neq 0$，$y\neq 0$，$\forall x\in I$.

② $y(x)$ 在 I 上存在；③ 叠加原理 y_1,y_2 解 $\Rightarrow c_1y_1+c_2y_2$ 也为解.

解集为一维线性空间　$y=c\phi_1(x)$.　找到一个非零解

例：$y'=ay$，$\lim_{x\to+\infty}y(x)$　$y(x)=ce^{\int a\,dx}=ce^{ax}$

① $c=0$，$y\equiv 0$，$\lim_{x\to+\infty}y(x)=0$　　分类讨论.

② $C\neq 0$　$a>0$，$\lim_{x\to+\infty}y(x)=+\infty$.

$a=0$　$y\equiv c$，$\lim_{x\to+\infty}y(x)=c$.

$a<0$　$\lim_{x\to+\infty}y(x)=0$

非齐次LODE　$y'=p(x)y+q(x)$.　$p,q\in C(I)$.

1)积分因子法：$\mu=e^{-\int p\,dx}$　$e^{-\int p\,dx}(y'-p(x)y)=e^{-\int p\,dx}q(x)$.

(*)'记　$y=Ce^{\int p\,dx}\Leftrightarrow e^{-\int p\,dx}y(x)\equiv c\Leftrightarrow(e^{-\int p\,dx}y)'=0$

$\Leftrightarrow e^{-\int p\,dx}(y'-p(x)y)=0$

$(e^{-\int p dx} y)' = q(x) e^{-\int p dx}$

$\therefore e^{-\int p dx} y(x) = C + \int q(x) e^{-\int p dx} dx$

通解：$\boxed{y(x) = e^{\int p dx}\left(C + \int q(x) e^{-\int p dx} dx\right)}$ C为任意常数

2) 常数变易法 齐次 ⇒ 非齐次. $y' = py$ 通解 $y = Ce^{\int p dx}$

非齐次LODE解设 $y = u(x) e^{\int p dx}$ 常数 ⇒ 函数.

1-1 对应. 求出 $u(x)$ 即可得 y

代入方程中 $u' e^{\int p dx} + pu e^{\int p dx} = pu e^{\int p dx} + q$.

$u' = q e^{-\int p dx} \Rightarrow u = C + \int q e^{-\int p dx} dx$

通解为 $y = e^{\int p dx}\left(C + \int q e^{-\int p dx} dx\right)$

$(*)\begin{cases} y' = py + q \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ $y = e^{\int_{x_0}^{x} p(t) dt}\left(C + \int_{x_0}^{x} q(t) e^{-\int_{x_0}^{t} p(s) ds} dt\right)$

$\Rightarrow y_0 = C$

特解. $y = e^{\int_{x_0}^{x} p(t) dt}\left(y_0 + \int_{x_0}^{x} q(t) e^{-\int_{x_0}^{t} p(s) ds} dt\right)$

$= \boxed{y_0 e^{\int_{x_0}^{x} p(t) dt} + \int_{x_0}^{x} q(t) e^{\int_{t}^{x} p(s) ds} dt}$ ⇒ 解存在

性质. 1) Cauchy 问题 $\exists!$ 解 (!表示唯一性).

反证法：设(*)存在两个解 $y_1(x)$, $y_2(x)$, $x \in I$.

$\therefore y_1' = py_1 + q \quad y_1(x_0) = y_0$

$y_2' = py_2 + q \quad y_2(x_0) = y_0$

相减有 $\begin{cases} (y_1 - y_2)' = p(y_1 - y_2) \\ (y_1 - y_2)(x_0) = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{LODE性质1}} y_1 \equiv y_2, \forall x \in I$ 矛盾.

2) 解在系数有定义且连续的区间 I 上存在

3) 非齐次LODE通解 = 相应齐次LODE通解 + 非齐次LODE特解

例: $y' = \frac{y}{2x-y^2}$ $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x-y^2}$ $\Rightarrow$ 一阶 ODE

$\frac{dx}{dy} = \frac{2x-y^2}{y} = \frac{2}{y}x - y$ 将 y 作为自变量, x(y) 作为未知函数 ($y \neq 0$)

$x(y) = e^{\int \frac{2}{y} dy}(c + \int -y e^{-\int \frac{2}{y} dy} dy) = e^{2\ln|y|}(c + \int -y \cdot e^{-2\ln|y|} dy)$

$= y^2(c - \int y \cdot \frac{1}{y^2} dy) = y^2(c - \ln|y|)$ 通解

$y \equiv 0$ 是解 解: $x = y^2(c - \ln|y|)$ 或 $y \equiv 0$

积分方程.

例: $2\int_0^x (x+1-t) f'(t)\, dt = x^2 - 1 + f(x)$

☆ $\frac{d}{dx}\int_0^x g(t)dt = g(x)$ $\quad \frac{d}{dx}\int_0^x g(t,x)dt = g(x,x) + \int_0^x \frac{\partial g(t,x)}{\partial x} dt.$

$\frac{d}{dx}\int_0^x g(t)h(x)dt = \frac{d}{dx}\left(\int_0^x g(t)dt\, h(x)\right) = \frac{dh(x)}{dx} \cdot \int_0^x g(t)dt + g(x)h(x).$

$\frac{d}{dx}\int_0^x g(t,x)dt = g(x,x) + \int_0^x \frac{\partial g(t,x)}{\partial x} dt.$

证明: 利用求导的定义 左边 $= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_0^{x+\Delta x} g(t, x+\Delta x)dt - \int_0^x g(t,x)dt}{\Delta x}$

$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_0^{x+\Delta x} g(t, x+\Delta x)dt - \int_0^x g(t, x+\Delta x)dt}{\Delta x} + \frac{\int_0^x g(t, x+\Delta x) - g(t,x) dt}{\Delta x}$

$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} g(t, x+\Delta x)dt}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \int_0^x \frac{g(t, x+\Delta x) - g(t,x)}{\Delta x} dt$

t 视为变量

由于 $\min g(t,x) < \frac{\int_x^{x+\Delta x} g(t, x+\Delta x)dt}{\Delta x} < \max g(t,x)$ $\quad t \in (x, x+\Delta x)$

$\exists\, \xi \in (x, x+\Delta x)$, 使得. $\sim = f(\xi, x+\Delta x)$

又当 $\Delta x \to 0$ 有 $\xi \to x$, $x+\Delta x \to x$ $\quad \frac{g(t, x+\Delta x) - g(t,x)}{\Delta x} = \frac{\partial g(t,x)}{\partial x}$

因此左 $= g(x,x) + \int_0^x \frac{\partial g(t,x)}{\partial x} dt$ = 右边 □

左 $= 2x \int_0^x f'(t)dt + 2\int_0^x (1-t) f'(t)dt$

$= 2x(f(x) - f(0)) + 2\int_0^x (1-t) f'(t)\, dt$

积分方程中 $x=0$ 有 $0 = -1 + f(0)$, 即 $f(0) = 1$

$2x[f(x) - 1] + 2\int_0^x (1-t) f'(t)dt = x^2 - 1 + f(x).$

两边对 x 求导有 $2(f(x)-1)+2xf'(x)+2(1-x)f(x)=2x+f'(x)$

$f'=-2f+2x+2$ 1阶 L ODE

$$f(x)=e^{\int p\,dx}\left(C+\int q(x)e^{-\int p\,dx}dx\right)$$

$$=e^{2x}\left(C+\int(2x+2)e^{2x}dx\right)$$

$$\begin{cases} f'=-f+2x+2. & \text{用特解公式} \\ f(0)=1 \end{cases}$$

$$f(x)=e^{\int_0^x p(t)dt}\left(y_0+\int_0^x q(t)e^{-\int_0^t p(s)ds}dt\right)$$

分部积分

$$=e^{-2x}\left(1+\int_0^x(2t+2)e^{2t}dt\right).\quad=\frac{1}{2}+x+\frac{1}{2}e^{-2x}$$

非线性 $y'=f(x,y)$ — 变量分离方程 $y'=f(x)g(y)$

当 $g(y)\neq0$ 时 $\frac{y'}{g(y)}=f(x)$ 当 $g(y^*)=0$ 时，$y\equiv y^*$，解.

通解：$\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx+C$ C为任意常数

☆ $$\frac{d}{dx}\left(\int\frac{dy}{g(y)}\right)=\frac{d}{dx}\left(\int_{y_0}^{y}\frac{dt}{g(t)}\right)=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d}{dy}\left(\int_{y_0}^{y}\frac{dt}{g(t)}\right).=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{1}{g(y)}=\text{左}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\int\frac{dy}{g(y)}\right)=f(x)\Rightarrow\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)\,dx+C$$

$$h(y)\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}H(y)=f(x).$$

$$\int h(y)dy=H(y)=C+F(x)=C+\int f(x)dx$$

ODE 与积分方程等价.

☆ $$\begin{cases} h(y)\frac{dy}{dx}=f(x) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}\iff\int_{y_0}^{y}h(t)dt=\int_{x_0}^{x}f(s)ds+C.$$

① ②

若 $y=\phi(x)$ 为 ① 解 $h(\phi(x))\phi'(x)=f(x)$.

$$\int_{x_0}^{x} h(\phi(t))\phi'(t)\,dt=\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt.$$

令 $y=\phi(x)$ $\int_{y_0}^{y} h(y)\,dy=\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$

若 $y=\phi(x)$ 为 ② 解 i.e. $\int_{y_0}^{\phi(x)} h(t)\,dt=\int_{x_0}^{x} f(s)\,ds$

关于 x 求导: $h(\phi(x))\phi'(x)=f(x)$

总结: $y'=f(x)g(y)$ 变量分离方程

求解: step1. 若 $g(y^*)=0$, $y=y^*$ 解

step2. $y\neq y^*$. $\frac{y'}{g(y^*)}=f(x)$

step3. 通解: $\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)\,dx+C$.

$\boxed{\text{所有解为 } y=y^* \text{ 或 } \int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)\,dx+C.}$

△!

$y'=py$ 通解 = 所有解

$y'=\frac{3}{2}y^{\frac{1}{3}}$ $y=\pm\sqrt{(x+C)^3}$ 或 $y\equiv 0$ 通解 ≠ 所有解.

$\begin{cases} y'=\frac{3}{2}y^{\frac{1}{3}} \\ y(0)=0 \end{cases}$ 无穷多解.

例1. $y'=y^2f(x)$ ① $y=0$ 是解 ② $y\neq 0$ $\frac{dy}{y^2}=f(x)\,dx \Rightarrow -\frac{1}{y}=\int f(x)\,dx+C$.

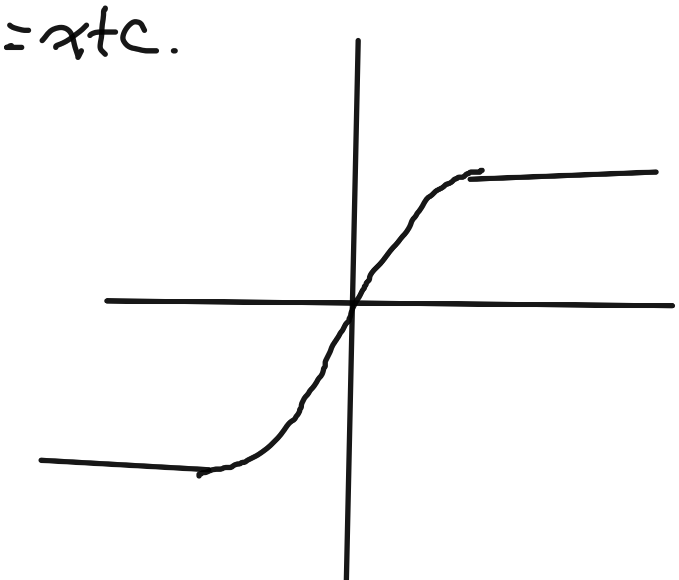
例2: $y'=\sqrt{1-y^2}$ ① $y=\pm 1$

② $y\neq\pm 1$ $\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=dx \Rightarrow \arcsin y=x+C$.

通解. $y=\sin(x+C)$, $-\frac{\pi}{2}<x+C<\frac{\pi}{2}$

所有解. $y=\sin(x+C)$ 或 $y=1$ $x\in\mathbb{R}$.

$y=\begin{cases} -1, & x\in(-\infty,\frac{\pi}{2}) \\ \sin x, & x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \\ 1, & x\in[\frac{\pi}{2},+\infty) \end{cases}$ 把两个解拼接



LODE　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　NOLODE

相应问题唯一解　　　　　　　　　-　　　　　×

解存在条数有意义且连续区间上存在　　　　　×

不同初值，解存在区间一样　　　　　　　　　×

y有界 $\Rightarrow y'$ 有界　　　　　　　　　　×

例：$\begin{cases} yy'+(1+y^2)\sin x=0 \\ y(0)=1 \end{cases}$　　　$y\sim 0,\ y'\sim\infty$

$$\frac{y\,dy}{1+y^2}=-\sin x\,dx \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}dy^2}{1+y^2}=-\sin x\,dx$$

$\frac{1}{2}\ln(1+y^2)=\cos x+c$　　$\because y(0)=1$　$\therefore \frac{1}{2}\ln 2=1+C \Rightarrow C=\ln\sqrt{2}-1$

$\frac{1}{2}\ln(1+y^2)-\frac{1}{2}\ln 2=\cos x-1$　　$\ln\frac{1+y^2}{2}=2\cos x-2,=-4\sin^2\frac{x}{2}$

$y=\pm\sqrt{2e^{-4(\sin\frac{x}{2})^2}-1}$　　又 $y(0)=1$　则 $y=\sqrt{2e^{-4(\sin\frac{x}{2})^2}-1}$

定义域：$2e^{-4(\sin\frac{x}{2})^2}-1>0 \Rightarrow |x|<2\arcsin\frac{\sqrt{\ln 2}}{2}=x^*$

$\lim\limits_{x\to x^*}y(x)=0$　而 $\lim\limits_{x\to x^*}|y'(x)|=\infty$

二. 非线性方程　齐次方程．$y'=f(x,y)$

$f(\lambda x,\lambda y)=f(x,y)$

定义(齐性方程)　若 $\lambda\neq 0$，$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^k f(x,y)$，则称 $f(x,y)$ 为 k 次齐次函数．若 $f(x,y)$ 是零次齐次方程．则称 $y'=f(x,y)$ 是齐次方程．

$f(x,y)=x^2+2y^2$　　$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^2(x^2+2y^2)=\lambda^2 f(x,y)$ 二次齐次函数．

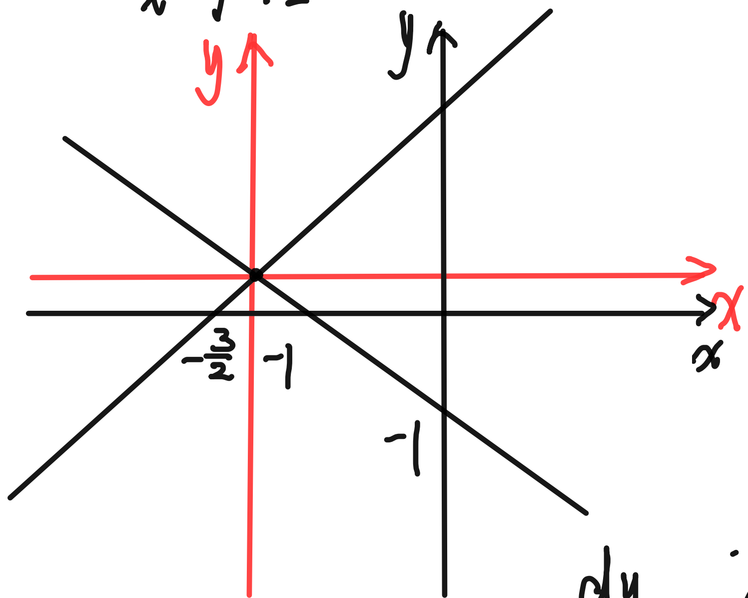
齐次方程：　$y'=f(x,y)=f(1,\frac{y}{x})$．　令 $u=\frac{y}{x}$，$\therefore y=ux$

$(ux)'=f(1,u) \Rightarrow u'x+u=f(1,u)$.

$\Rightarrow u'=\frac{1}{x}(f(1,u)-u)$ 变量分离法．

例：$y'=\frac{x+y}{x-y}$　　$f(x,y)=\frac{x+y}{x-y}$．$f(\lambda x,\lambda y)=\frac{\lambda x+\lambda y}{\lambda x-\lambda y}$　$\forall\lambda\neq 0$ $=\frac{x+y}{x-y}=f(x$

例1. $y'=\frac{x+y+1}{x-y+2}$ 准齐次方程 $\xrightarrow{\text{变换}}$ 齐次方程.



$$\begin{cases} x+y+1=0 \\ x-y+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{3}{2} \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

令 $\begin{cases} \xi=x+\frac{3}{2} \\ \eta=y-\frac{1}{2} \end{cases}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{d\eta}\cdot\frac{d\xi}{dx}\cdot\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{d\eta}{d\xi}$$

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{\xi+\eta}{\xi-\eta}$$

$$\Rightarrow \arctan\frac{\eta}{\xi}=\ln\sqrt{\xi^2+y^2}+C$$

$$\therefore \arctan\frac{y-\frac{1}{2}}{x+\frac{3}{2}}=\ln\sqrt{(x+\frac{3}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2}+C$$

例 (1) $y'=x^{k-1}F\left(\frac{y}{x^k}\right)$ 令 $u=\frac{y}{x^k}$ 则 $y=ux^k$

$$\frac{dy}{dx}=x^{k-1}F\left(\frac{y}{x^k}\right) \qquad u'x^k+kux^{k-1}=x^{k-1}F(u)$$

$$u'=\frac{1}{x}(F(u)-ku)$$

(2) $xy'=F(xe^{-y})$ 令 $u=xe^{-y} \Rightarrow y=\ln\frac{x}{u}$

$$x\left(\frac{1}{x}-\frac{u'}{u}\right)=F(u) \Rightarrow 1-F(u)=\frac{x}{u}u' \Rightarrow u'=\frac{1}{x}[u(1-F(u))]$$

(3) $y'=\frac{y}{x}+xF\left(\frac{y}{x}\right)$ 令 $u=\frac{y}{x}$ $(y=ux)$.

$$u'x+u=u+xF(u) \Rightarrow u'=F(u)$$ 分母太复杂 分子简单

(4) $y'=\frac{y}{x+F\left(\frac{y}{x}\right)}$ 令 $u=\frac{y}{x}$ $(y=ux)$ $u'x+u=\frac{ux}{x+F(u)} \Rightarrow u'=\frac{-uF(u)}{x(x+F(u))}$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{x}{y}+\frac{1}{y}F\left(\frac{y}{x}\right)$$ y为自变量, x为未知函数

令 $u=\frac{x}{y}$, $(x=yu)$ $\quad u+y\frac{du}{dy}=u+\frac{1}{y}F\left(\frac{1}{u}\right) \quad \frac{1}{F(\frac{1}{u})}du=\frac{1}{y^2}dy$

三 非线性方程 伯努利方程 $\Rightarrow$ 线性方程 积 线性

定义(伯努利方程) $y' = p(x)y + q(x)y^\alpha$, $p, q \in C(I)$, $\alpha \neq 0, 1$

(*) 两边同除以 y^α. $y^{-\alpha}y' = p(x)y' + q$

令 $\tilde{y} = y^{1-\alpha}$ $\tilde{y}' = (y^{1-\alpha})' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$

$= (1-\alpha)p\tilde{y} + (1-\alpha)q(x)$

$$\boxed{y^{1-\alpha} = \tilde{y} = e^{\int(1-\alpha)Pdx}\left(c + \int(1-\alpha)qe^{-\int(1-\alpha)Pdx}dx\right)}$$

注: $\alpha > 0$, $y \equiv 0$ 也是解

例 $y' + \frac{y}{x} = ay^2\ln x$ $(x > 0, a \neq 0)$

1) $y \equiv 0$ 为解

2) $y \neq 0$. 两边同除 y^2 $\therefore \frac{y'}{y^2} + \frac{1}{x}\frac{1}{y} = a\ln x$

令 $u = \frac{1}{y}$ $-u' + \frac{1}{x}u = a\ln x$ $u' = \frac{1}{x}u - a\ln x$

$u = e^{\int\frac{1}{x}dx}\left(c + \int(-a\ln x)e^{-\int\frac{1}{x}dx}dx\right) = x\left(c - \frac{a}{2}(\ln x)^2\right)$

$y = \frac{1}{x(c - \frac{a}{2}(\ln x)^2)}$ 或 $y \equiv 0$

推: Riccati 方程. $y' + py + qy^2 = k(x)$ 已知一解 $\phi(x)$

$\begin{cases} y' + py + qy^2 = k(x) \\ \phi' + p\phi + q\phi^2 = k(x) \end{cases}$ 相减有.

$(y-\phi)' + p(y-\phi) + q(y-\phi)(y+\phi) = 0$

令 $u = y - \phi$: $u' + pu + qu(u + 2\phi) = 0$

$u' + (p + 2q\phi)u + qu^2 = 0$ $\Rightarrow$ 伯努利方程求解取 $\alpha = 2$

例: $y' + y^2 = \frac{2}{x^2}$

(猜) $y = \frac{c}{x}$ 代入 $-\frac{c}{x^2} + \frac{c^2}{x^2} = \frac{2}{x^2}$

$c^2 - c = 2$, $c = 2$ 已知一个解 $\phi = \frac{2}{x}$

令 $u = y - \frac{2}{x}$, ($y = u + \frac{2}{x}$)

$u' + \frac{4}{x} u + u^2 = 0$

① $u = 0$ 为解

② $u \neq 0$, 方程两边同时除以 u^2, $\frac{u'}{u^2} + \frac{4}{x} \cdot \frac{1}{u} + 1 = 0$

令 $z = \frac{1}{u}$, $z' = \frac{4}{x} z + 1$

$z = e^{\int \frac{4}{x} dx} (C + \int 1 \cdot e^{-\int \frac{4}{x} dx} dx) = x^4 (C + \int x^{-4} dx) = Cx^4 - \frac{1}{3} x$

$u = \frac{1}{Cx^4 - \frac{1}{3}x}$ 或 $u = 0$ $y = \frac{2}{x} + \frac{1}{Cx^4 - \frac{1}{3}x}$ 或 $y = \frac{2}{x}$ (其中 C 为任意常数)

四、非线性方程: 恰当方程(全微分方程). $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

含任意常数 C 的函数族 $F(x,y) = C$

微分: $dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0$ 一阶 ODE.

$M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0$ 偏导数存在且连续

$F(x+\Delta x, y+\Delta y) = F(x,y) + A\Delta x + B\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$

定义(恰当方程) 设 G 为 $\mathbb{R}^2$ 上的一个区域, 若 G 上存在具有一阶连续偏导数 $F(x,y)$, s.t. $dF = M dx + N dy$ i.e. $\frac{\partial F}{\partial x} = M$, $\frac{\partial F}{\partial y} = N$

则称 1阶 ODE $M dx + N dy = 0$ 是恰当(全微分)方程

F 称为方程的原函数

① 判断是否为恰当方程 $\Longrightarrow$ ② 求 F $\Longrightarrow$ ③ 通解 $F(x,y) = C$

判定定理：若 M,N 在单连通区域 G 上连续且有连续的一阶偏导数，

则 ODE：$Mdx+Ndy=0$ 是恰当方程 $\Longleftrightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}\ \forall (x,y)\in G$

若是恰当方程，则 $F(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Mdx+Ndy$

证明：$\Rightarrow$：$Mdx+Ndy$ 是恰当方程 $\therefore \exists F$, s.t. $\frac{\partial F}{\partial x}=M$, $\frac{\partial F}{\partial y}=N$

$\therefore \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}$, $\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}$

由条件 $\frac{\partial M}{\partial y}$, $\frac{\partial N}{\partial x}$ 连续，$\therefore \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}$ $\therefore \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial M}{\partial x}$

$\Leftarrow$ 令 $F(x,y)=\int_0^x M(s,0)ds+\int_0^y M(x,t)\,dt \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y}=N(x,y)$

断言：$F(x,y)=\int_0^y N(0,t)dt+\int_0^x M(s,y)ds \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}=M(x,y)$

相减有 $\int_0^x M(s,0)-M(s,y)ds+\int_0^y N(x,t)-N(0,t)\,dt$

由牛莱 $=-\int_0^x\int_0^y \frac{\partial M}{\partial y}(s,t)\,dt\,ds+\int_0^y\int_0^x \frac{\partial N}{\partial x}(s,t)\,ds\,dt$

$=\int_0^x\int_0^y \left(-\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial x}\right)(s,t)\,dt\,ds=0$ 断言成立

如何求 F

1) 公式：$F(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Mdx+Ndy$ （积分与路径无关）.

$$=\int_{y_0}^{y} N(x_0,t)\,dt+\int_{x_0}^{x} M(s,y)ds$$

$$=\int_{x_0}^{x} M(s,y)\,ds+\int_{y_0}^{y} N(x,t)\,dt$$

2A) $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=M(x,y)$ $\quad F(x,y)=\int M(x,y)dx+\phi(y)$ （将 $\phi(y)$ 视为 c）

利用 $\frac{\partial F}{\partial y}=N$ $\quad \int \frac{\partial M}{\partial y}(x,y)dx+\phi'(y)=N \Rightarrow \phi(y)$

2B). $F(x,y)=\int N(x,y)dy+\varphi(x)$ （将 $\varphi(x)$ 视为 c）.

$\int \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)+\varphi'(x)=M(x,y) \Rightarrow \varphi(x)$

2c) $\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}=M \\ \frac{\partial F}{\partial y}=N \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F(x,y)=\int M(x,y)\,dx+\phi(y) \\ F(x,y)=\int N(x,y)\,dy+\varphi(x) \end{cases}$

3) 凑微分（分项凑微分）.

总结 1. 若 $f(\lambda x,\lambda y)=f(x,y)$ $\forall\lambda\neq 0$，则 $y'=f(x,y)$ 称为齐次方程 变量分离

①判断. ② 令 $u=\frac{y}{x}$ $y=ux$ 形如 $y'=f\left(\frac{ax+by}{cx+ey}\right)$ 是齐次方程

2. $\frac{d(y+y_0)}{d(x+x_0)}=\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{ax+by+m}{cx+ey+n}\right)=f\left(\frac{a(x+x_0)+b(y+y_0)}{c(x+x_0)+e(y+y_0)}\right)$

$\begin{cases} a(x+x_0)+b(y+y_0)=ax+by+m \\ c(x+x_0)+e(y+y_0)=cx+ey+n \end{cases}$ 令 $\begin{cases} u=y+y_0 \\ v=x+x_0 \end{cases}$ $\frac{du}{dv}=f\left(\frac{av+bu}{cv+eu}\right)$ 齐次方程

3. 伯努利：$y'=py+qy^{a}$ $a\neq 0,1$.

令 $u=y^{1-a}$ $u'=(1-a)pu+(1-a)$ LODE

4. Riccati 方程，$y'=py+qy^2+k(x)$ 已知一个解 y_0.

令 $u=y-y_0$，$u'=pu+qu^2+2quy_0$

例：$y'+y^2=bx^m$，$m=0,-2,\frac{-4k}{2k\pm1}$ $\Rightarrow$ 变量分离方程

1) $m=0$ $y'+y=b$

2) $m=-2$ $y'+y^2=\frac{b}{x^2}$ $\Rightarrow y'=\frac{b}{x^2}-y^2=\frac{b-y^2x^2}{x^2}$.

令 $u=xy$ $\Rightarrow y=\frac{u}{x}$ $\Rightarrow y'=\frac{u'}{x}-\frac{u}{x^2}=\frac{b-u}{x^2}$

$u'=x\cdot\frac{b+u-u^2}{x^2}=\frac{1}{x}(b+u-u^2)$

3) $m=\frac{-4k}{2k-1}$ $k=1$, $m=-4$ $k=2$, $m=-\frac{8}{3}$

$y'+y^2=\frac{b}{x^2}\Rightarrow y'=\frac{b}{x^4}-y^2=\frac{b^2-y^2x^4}{x^4}$

令 $u=yx^2\Rightarrow y=\frac{u}{x^2}\Rightarrow y'=\frac{u'}{x^2}-2\frac{u}{x^3}=\frac{b-u^2}{x^4}$

$u'=\frac{b+2ux-u^2}{x^2}$ $\Rightarrow x^2\frac{du}{dx}=b+2ux-u^2=b-(u-x)^2+x^2$

$x^2\left(\frac{du}{dx}-1\right)=b-(u-x)^2$ 令$w=u-x$

$x^2\left(\frac{dw}{dx}+1\right)=b-w^2+x^2 \Rightarrow x^2\frac{dw}{dx}=b-w^2$ (变量分离方程).

令$t=\frac{1}{x}$, $dt=-\frac{dx}{x^2}$；令$z=-w=x-u$ $\Rightarrow \frac{dz}{dt}+z^2=b$

对于一般情形：$y'+y^2=bx^{-\frac{4k}{2k-1}} \Rightarrow \frac{dz}{dt}+z^2=bt^{-\frac{4(k-1)}{2k-3}}$

$m=\frac{-4k}{2k+1}$, $k=1$, $m=-\frac{4}{3}$

$m=-\frac{4}{3}$, $y'+y^2=bx^{-\frac{4}{3}}$ (怎样将其转化为 $m=-4$ 情形)

$dy+y^2dx=bx^{-\frac{4}{3}}dx=cdt$ ← (线性)

令$t=x^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow dy-3y^2t^{-4}dt=-3bdt$

$\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dt}-3t^{-4}=\frac{-3b}{y^2}$

令$u=\frac{1}{y}$, $\frac{du}{dt}+3t^{-4}=3bu^2$

令$w=-3bu$ $\frac{dw}{dt}+w^2=\frac{9b}{t^4}$

$x=f(y,y')$

令$p=y'$ $dy=pdx$ $dy=p(f_y dy+f_p dp)$

显式的一阶ODE方程

$y=f(x,y')$

令$p=y'$ $dy=pdx$ $f_x dx+f_p dp=pdx$ $p=p(x;c)$

$y=f(x,p(x;c))$

克莱罗方程：$y=xp+ap^2$.

$Mdx+Ndy=0$ $\begin{cases} M_y=N_x \to \text{为恰当方程} \\ M_y\neq N_x \to \text{找 } \mu\neq 0 \text{ s.t. } \mu M dx+\mu N dy=0 \text{ 为恰当方程} \end{cases}$ | 积分与路径无关 $c(x)$ 或 $c(y)$ 凑全微分

积分因子 μ:

- 存在性：若 $Mdx+Ndy=0$ 有通解 $f(x,y)=C$，则必存在 μ 且有无穷多个

证明：$f_x dx+f_y dy=0$

$\because f(x,y)=C$ 是 $Mdx+Ndy=0$ $\therefore$ $\frac{f_x}{M}=\frac{f_y}{N}\triangleq\mu$ （当 $M\neq0, N\neq0$）

$\mu(Mdx+Ndy)=0 \Rightarrow f_x dx+f_y dy=0=d f(x,y)$ 为恰当方程.

若 $M=0$, $N\neq0$, $Ndy=0$ 令 $\mu=\frac{1}{N}$

若 $N=0$, $M\neq0$, $Mdx=0$ 令 $\mu=\frac{1}{M}$

无穷多个：若存在一个积分因子 $\mu\neq0$，则 $C\mu$ 为积分因子.

$df=\mu Mdx+\mu Ndy=0$

设任意 φ 为连续函数，$\varphi(f)df=0$

$d(\int\varphi(f)df)=\varphi(f)\mu(Mdx+Ndy)$. 为恰当方程

则 $\varphi(f)\mu$ 为恰当方程.

- 定义：$\mu Mdx+\mu Ndy=0$ 为恰当方程 $\Leftrightarrow (\mu M)_y=(\mu N)_x$

$$\frac{\partial\mu}{\partial y}M+\mu\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial\mu}{\partial x}N+\mu\frac{\partial N}{\partial x} \quad (\text{1阶 PDE})$$

考虑特殊情形 将1阶PDE ⇒ ODE

1) $\mu=\mu(x)$ 只为关于 x 函数，与 y 无关. $\mu'(x)N=\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)$

$\mu(x)=Ce^{\int\frac{M_y-N_x}{N}dx}$

△ 若 $\frac{M_y-N_x}{N}$ 仅与 x 有关，与 y 无关，则 $\exists\ \mu(x)=Ce^{\int\frac{M_y-N_x}{N}dx}$

2) $\mu=\mu(y)$ $\mu'(y)M=\mu\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)$ $\mu(y)=Ce^{\int\frac{N_x-M_y}{M}dy}$

△ 若 $\frac{N_x-M_y}{M}$ 仅与 y 有关，与 x 无关，则 $\exists\ \mu(y)=Ce^{\int\frac{N_x-M_y}{M}dy}$

例：$(3x^2+y)dx+(2x^2y-x)dy=0 \Rightarrow (3x^2dx+2x^2y\,dy)+(ydx-xdy)=$

分组求积分因子

例：$(\frac{y}{x}+3x^2)dx+(1+\frac{x^3}{y})dy=0$

ODE 1: $\frac{y}{x}dx+dy=0$ $\mu_1=x$ 通解 $F_1=xy=c$

ODE 2. $3x^2dx+\frac{x^3}{y}dy=0$ $\mu_2=y$ 通解 $F_2=x^3y=c$.

公共积分因子：$\varphi(F_1)\mu_1$ 与 $\varphi(F_2)\mu_2$

即找 φ_1,φ_2 连续函数，s.t $\varphi_1(F_1)\mu_1=\varphi_2(F_2)\mu_2=\mu$（公共积分因子）.

$\varphi_1(xy)x=\varphi_2(x^3y)+y$ 假设 φ_1,φ_2 为简单函数，$\varphi_1(t)=t^\alpha$, $\varphi_2(t)=t^\beta$

$\begin{cases}\alpha=2\\ \beta=1\end{cases}$ $\mu=(xy)^2x=x^3y^2$. $\Rightarrow$ 通解：$\frac{1}{3}x^3y^3+\frac{1}{2}x^6y^2=c$（c为任意常数）

可降阶二阶 ODE：$y''=f(x,y,y')$

1) $y''=f(x) \Rightarrow y'=\int f(x)dx+c_1 \Rightarrow y=\int\left[\int f(x)\,dx\right]dx+c_1x+c_2$

也可推广至 $y^{(n)}=f(x)$

2) $y''=f(x,y')$ 令 $p=y'(x)$, $\frac{dp}{dx}=f(x,p)$ 一阶 ODE

求出 $p(x) \Rightarrow y=\int p(x)dx+C$

3) $y''=f(y,y')$ 令 $p=y'=\frac{dy}{dx}$, $\frac{dp}{dx}=f(y,p)$

由链式求导法则：$\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot p \Rightarrow p\frac{dp}{dy}=f(y,p)$

将y视为自变量，p为关于y的未知函数 $=\varphi(f)\,\mu(Mdx+Ndy)$

非线性 $F(x,y,y')=0 \Rightarrow y'=f(x,y)$

参数法.

Step 1. 令 $p=y'$, $F(x,y,p)=0$. 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一个曲面：

找两个独立变量 (s,t). $\begin{cases}x=x(s,t)\\ y=y(s,t)\\ p=p(s,t).\end{cases}$

step 2. $dy=pdx$ $dy(s,t)=p(s,t)\,dx(s,t)$ 为1阶 ODE

$\partial_s y\,ds+\partial_t y\,dt=p(\partial_s x\,ds+\partial_t x\,dt)$. 解出 $t=t(s)$

step 3: $\begin{cases} x = x(s, t(s)) \\ y = y(s, t(s)) \end{cases}$

定义:奇解：设 $y=\phi(x)$ 在区间 J 上有定义且是一阶 ODE

$$F(x,y,y')=0 \qquad (*)$$

的一个特解. 其积分曲线 $\Gamma=\{(x,y)\,.\,y=\phi(x), x\in J\}$.

如果对于每一点 $M\in\Gamma$, 在 M 的一个任意域内方程 (*) 有一个不同于特解 $\phi(x)$ 的解在点 M 处与 Γ 相切. 称特解 $y=\phi(x)$ 为方程 (*) 的奇解.

P判别法 设 $F(x,y,p)$ 对 $(x,y,p)\in G$ 是连续的, 并且对 y, P 的偏导数 F_y 和 F_p 在 G 连续若 $\phi(x)$ ($x\in J$) 是 (*) 的一个奇解. 且

$$(x, \phi(x), \phi'(x))\in G, \ (x\in J).$$

则奇解 $y=\phi(x)$ 满足: $\begin{cases} F(x,y,p)=0 \\ F_p(x,y,p)=0 \end{cases}$ 其中 $x\in J$, $p=\phi'(x)$

设 $F(x,y,p)$ 对于 $(x,y,p)\in G$ 是二阶连续可微, 设方程 (*) 的 P-判别式:

$\begin{cases} F(x,y,p)=0 \\ F_p(x,y,p)=0 \end{cases}$ 得到的函数 $y=\phi(x)$, $(x\in J)$ 是 (*) 的解

并且 $\begin{cases} F_y(x,\phi(x),\phi'(x))\neq 0 \\ F_{pp}(x,\phi(x),\phi'(x))\neq 0 \\ F_p(x,\phi(x),\phi'(x))=0 \end{cases}$ 对于 $\forall x\in J$ 成立. 则 $y=\phi(x)$ ($x\in J$) 为 (*) 奇解.

$x=f(y,y')$

令 $p=y'$ $\quad dy=p\,dx \quad dy=p(f_y\,dy+f_p\,dp)$

显式的一阶 ODE 方程

$y=f(x,y')$

令 $p=y'$ $\quad dy=p\,dx \quad f_x\,dx+f_p\,dp=p\,dx \quad p=p(x;c)$

$y=f(x,p(x;c))$

克莱罗方程: $y=xp+ap^2$.

柯西问题. $\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$ $\Longleftrightarrow$ 积分程连续. $y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,y(t))dt$

证明: $\Rightarrow$ 微分方程积分 $\Leftarrow$: 证明 $\int_{x_0}^{x} f(t,y(t))$ 连续可微

Lip条件:

G为平面区域 f(x,y)在G上有定义, 对于G中任意有界闭集 $K\subset G$, $\exists L_k>0$, s.t. $\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2)\in K$, $|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|\le L_k|y_1-y_2|$, 则称f在G中关于y满足(局部)Lip条件.

若存在一致Lip常数(与K无关)L, 使上式成立, 则称f在G中关于y满足一致Lipschitz条件. $L_k=\max\limits_{(x,y)\in k}|f_y(x,y)|$

Piscard.存在唯一性定理

$f(x,y)\in C(R)$ $R=[x_0-a,x_0+a]\times[y_0-b,y_0+b]$.

f在R内关于y满足Lip条件, i.e. $\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2)\in R$ $|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|\le L|y_1-y_2|$

则 $\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$ 在 $[x_0-\alpha,x_0+\alpha]$ 上 $\exists$ 唯一解.

其中 $\alpha=\min\{a,\frac{b}{M}\}$. $M=\max\limits_{(x,y)\in R}|f(x,y)|$

证明. **1. 柯西问题 $\Leftrightarrow$ 积分方程**

(i) $\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $y(x)=\int_{x_0}^{x} f(t,y(t))dt$.

$\Rightarrow$: 若 $y=y(x)$ 是(i)的解, 对方程在 $[x_0,x]$ 上积分有

$y-y(x_0)=\int_{x_0}^{x} f(t,y(t))\,dt \Rightarrow$ (ii)

$\Leftarrow$: 若 $y=y(x)$ 是(ii)的解, 则 $y\in C[I]$, f连续且对y满足Lip条件

f(t,y(t))复合所以连续 $\therefore \int_{x_0}^{x} f(t,y(t))\,dt$ 连续可微.

由(ii) y(x)在I上连续可微.

对(ii)两边关于x求导: (ii)中x取x_0, $\begin{cases} y'(x)=f(x,y(x)) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ (i)

2. 构造逼近解：(Picard序列).

$y_0(x)=y_0$ $\quad y_1(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,y_0)dt$.

$y_n(t)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,y_{n-1}(t))dt,\ n=1,2,3\cdots$

得到函数序列 $\{y_n(x)\}\Big|_{-\infty}^{+\infty}$, $x\in I=[x_0,x_0+a]$.

是否为良定义：满足：① $y_n(x)\in C(I)$ ② $|y_n(x)-y_0|\le b$. $\forall n=0,1,2\ldots$

当 $n=0$ 时 ①② 显然成立.

假设当 $n=k$ 时 ①② 成立（利用数学归纳法）.

当 $n=k+1$ 时.

$y_{k+1}(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,y_k(t))dt$ 则 ① 显然成立 $y_{k+1}(x)\in C(I)$.

$|y_{k+1}(x)-y_0|=\left|\int_{x_0}^{x}f\,dt\right|\le\int_{x_0}^{x}|f|dt\le M|x-x_0|\le Ma\le M\cdot\frac{b}{M}=b$

3. Cauchy列.

Claim: $\forall x\in I=[x_0,x_0+a]$. $|y_k(x)-y_{k-1}(x)|\le\frac{ML^{k-1}}{k!}|x-x_0|^k$, $k=1,2,3\cdots$

4 验证极限为积分方程的解

Step 3. Cauchy列.

逼近解：Picard序列 $\{y_k(x)\}_{n=1}^{+\infty}$，$|y_k(t)-y_0|\le b,\ y_k(x)\in C(I)$

$$|y_k(x)-y_{k-1}(x)|\le\frac{ML^{k-1}}{k!}|x-x_k|^k,\ k=1,2,\ldots\quad\Longrightarrow\quad\text{Cauchy列}$$

数归：$|y_1(x)-y_0(x)|=|\int_{x_0}^{x}f(t,y_0)dt|\le M|x-x_0|$ 假设对于 k 成立，则

$$|y_{k+1}(x)-y_k(x)|=|y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,y_k(t))dt-y_0-\int_{x_0}^{x}f(t,y_{k-1}(t))dt|$$

$$\le\int_{x_0}^{x}L|y_k(t)-y_{k-1}(t)|dt\le\int_{x_0}^{x}L\frac{ML^{k-1}}{k!}(t-x_0)^k dt=\frac{ML^{k-1}}{k!}\cdot\frac{(x-x_0)^{k+1}}{k+1}$$

$\forall\epsilon>0,\ \exists N,\ \forall n>N,\ \sum_{k=n}^{\infty}\frac{(L\alpha)^{k+1}}{(k+1)!}<\epsilon$

Step 4：验证 $y(x)$ 为方程的解

$\forall\epsilon>0,\ \exists N,\ \forall n>m>N,\ |y_n(x)-y_m(x)|<\epsilon,\ \forall x\in I$

$y_n(x)\rightrightarrows y(x)$ $x\in I$, 令 $n\to\infty$.

$$|y_n(x)-y_m(x)|\le\sum_{k=m}^{n-1}|y_{k+1}(x)-y_k(x)|\le\frac{M}{L}\sum_{k=m}^{n-1}\frac{(L\alpha)^{k+1}}{(k+1)!}<\frac{M}{L}\cdot\epsilon$$

由Picard序列定义，$y_{k+1}(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,y_k(t))dt$

积分求和交换次序.

$$y(x)=\lim_{k\to\infty}y_{k+1}(x)=y_0+\lim_{k\to\infty}\int_{x_0}^{x}f(t,y_k(t))dt=y_0+\int_{x_0}^{x}\lim_{k\to\infty}f(t,y_k(t))dt=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,\lim_{k\to\infty}y_k(t))dt$$

f为连续函数函数外极限

而这里 $\lim_{k\to\infty}y_k(t)=y(t)$，从而 $y(x)$ 为积分方程的解。

存在性总结：①柯西方程 ⇔ 积分方程.
② 构造Picard良定义序列
③ Picard序列是Cauchy列
④ 验证极限为积分方程解

Cronwall不等式：$\alpha(x)\geq 0,\ u(x)\geq 0,\ \alpha,u\in C[x_0,x_1]$

$c\geq 0,\ k\geq 0.\quad u(x)\leq c+\int_{x_0}^{x}(\alpha(t)u(t)+k)dt,\ \forall x\in[x_0,x_1]\ (*)$.

$\Rightarrow u(x)\leq[c+k(x-x_0)]e^{\int_{x_0}^{x}\alpha(t)dt}$.

令 $f(x)=c+\int_{x_0}^{x}(\alpha(t)u(t)+k)dt$

$f'(x)=\alpha(x)u(x)+k$. 由 $\alpha\geq 0,\ u(x)\leq f(x)\Rightarrow f'(x)\leq\alpha(x)f(x)+k$.

积分因子 $\mu=e^{-\int_{x_0}^{x}\alpha(t)dt}$. $\quad (e^{-\int_{x_0}^{x}\alpha(t)dt}f(x))'=ke^{-\int_{x_0}^{x}\alpha(t)dt}$

在 $[x_0,x]$上积分. $e^{-\int_{x_0}^{x}\alpha dt}f(x)-f(x_0)\leq\int_{x_0}^{x}ke^{-\int_{x_0}^{t}\alpha ds}dt\leq k(x-x_0)$

$f(x)\leq[c+k(x-x_0)]e^{\int_{x_0}^{x}\alpha dt}$.

更优有 $f(x)\leq[c+k\int_{x_0}^{x}e^{-\int_{x_0}^{t}\alpha ds}dt]e^{\int_{x_0}^{x}\alpha dt}$.

迭代法:

$|y_1(x)-y_2(x)|\leq\int_{x_0}^{x}L|y_1(t)-y_2(t)|dt\Rightarrow|y_1-y_2|<\varepsilon,\ \forall\varepsilon>0\Rightarrow y_1\equiv y_2$.

断言 · claim: $|y_1-y_2|<c\dfrac{(L\alpha)^n}{n!}\ \forall n$

由于 $y_1,y_2\in C(I)$，则 y_1,y_2 有最值(闭区间). 设 $|y_1(x)|\leq N,\ |y_2(x)|\leq N$

$(*)\Rightarrow|y_1-y_2|(x)\leq\int_{x_0}^{x_2}2N\,dt=2LN(x-x_0)\leq 2LN\alpha$

代入$(*)$ $|y_1-y_2|(x)\leq\int_{x_0}^{x}L\cdot 2LN(t-x_0)dt=L^2N(x-x_0)^2$ 不断代入(*)迭代

$|y_1-y_2|(x)\leq 2N\dfrac{(L(x-x_0))^n}{n!}\leq 2N\cdot\dfrac{(L\alpha)^n}{n!}\quad\forall n=0,1,2,\ldots$

Osgood条件:

若 $f\in C(R)$, $|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|\leq F(|y_1-y_2|)\ \ \forall(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in R$

$F(r)>0,\ \forall r>0,\ \int_0^{r_1}\frac{dr}{F(r)}=+\infty$ 某个 $r_1>0$, F连续

则称 f在R内关于y满足Osgood条件.

定理2.4：f满足Osgood条件 $\Rightarrow \begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 至多只有一个解